

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет комп'ютерних наук
Кафедра штучного інтелекту та програмного забезпечення

Курс лекцій з вищої математики

1 семестр

Макаров О.А., Ніколенко І.Г.

спеціальність 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»
125 «Кібербезпека»
123 «Комп'ютерна інженерія»
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

2018 рік

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Матриці, визначники та системи лінійних рівнянь

Тема 1.1 Матриці. Подібні, симетричні, несиметричні, ортогональні, транспоновані та блокові матриці

Тема 1.2 Дії над матрицями. Многочлени від матриць.

Тема 1.3 Визначники матриці. Властивості та обчислення визначників 2-го і 3-го порядків.

Тема 1.4 Мінори, алгебраїчні доповнення. Обернена матриця

Тема 1.5 Ранг матриці. Елементарні перетворення матриці

Тема 1.6 Рішення систем лінійних рівнянь матричним методом. Правило Крамера, метод Гаусса

Тема 2. Елементи векторної алгебри та теорії лінійних просторів

Тема 2.1 Вектори. Операції над векторами. Колінеарні і компланарні вектори.

Тема 2.2 Лінійні простори. Лінійна залежність векторів. Базис і розмір лінійного простору.

Тема 2.3 Координати вектора. Проекція вектора на вісь. Модуль вектора. Напрявлені косинуси.

Тема 2.4 Скалярний добуток векторів. Евклідів простір. Довжина вектора. Нерівність Коші-Буняковського. Кут між векторами. Ортогональність векторів.

Тема 2.5 Перетворення координат. Матриця переходу. Ортогональні перетворення. Орієнтація базисів, орієнтація простору.

Тема 2.6 Векторний та мішаний добуток векторів. Полярна, циліндрична і сферична системи координат. Формули переходу.

Тема 2.7 Власні числа та власні вектори матриць. Методи їх знаходження.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 3. Алгебраїчні лінії першого порядку на площині і в просторі

Тема 3.1 Рівняння прямої. Взаємне розміщення прямих. Розподіл відрізка в даному співвідношенні. Пучки прямих. Пряма в прямокутній системі координат. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої. Кут між прямими.

Тема 3.2 Рівняння площини в просторі. Взаємне розташування площин. Пучки площин. Площина в прямокутній системі координат. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Напівплощини. Кут між площинами.

Тема 3.3 Пряма у просторі. Взаємне розміщення прямих у просторі. Відстань від точки до прямої у просторі. Відстань між двома перехресними прямими. Знаходження загального перпендикуляра до двох перехресних прямих.

Тема 4. Алгебраїчні лінії другого порядку на площині і в просторі

Тема 4.1 Еліпс, гіпербола, парабола та їх властивості. Рівняння кривої 2-го порядку в полярних координатах.

Тема 4.2 Загальне рівняння кривої другого порядку. Квадратичні форми, критерій Сильвестра. Перетворення рівняння кривої при перетворенні координат.

Тема 4.3 Канонічні рівняння поверхонь другого порядку: еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, циліндри і конуси. Перетин поверхонь другого порядку з площиною.

РОЗДІЛ 3. МНОЖИНИ ТА ФУНКЦІЇ, ГРАНИЦЯ, НЕПЕРЕРВНІСТЬ

- 3.1. Множини та функції.
- 3.2. Дійсні числа та їх підмножини.
- 3.3. Границя послідовності та її властивості.
- 3.4. Границя функції та її властивості.
- 3.5. Перша та друга чудові границі.
- 3.6. Неперервність, властивості неперервних функцій.

РОЗДІЛ 4. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

- 4.1. Похідна та диференціал, їх геометричний та фізичний зміст. Арифметичні властивості похідної, таблиця похідних.
- 4.2. Похідні та диференціали вищих порядків.
- 4.3. Властивості диференційованих функцій. Формула Тейлора.
- 4.4. Екстремуми, необхідні та достатні умови екстремумів.
- 4.5. Дослідження функцій та побудова графіків.

Рекомендована література

- 1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Краткий курс высшей математики*, М. Наука, 1978.
- 2. Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. М.: Айрис-пресс, 2006.
- 3. Погорелов А. В. *Аналитическая геометрия*. - М.: Наука, 1968.
- 4. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. – М.: Наука, 1988.
- 5. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. *Математический анализ*. - М.: Наука, 1984.
- 6. Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*. - М.: Наука, 1989.
- 7. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. - М.: Наука, 1977.

Методичне забезпечення

- 1. Ніколенко І.Г. *Деякі вступні поняття математичної логіки та теорії множин*. -Харьков: ХНУ ім. В.Н.Каразіна, 2008, 40 с. (учебно-методическое пособие по математическому анализу).
- 2. Ніколенко І.Г., Рыжий В.С. *Комплексные числа*. - Харьков: ХНУ ім. В.Н.Каразіна, 2007 (методические указания по математическому анализу).
- 3. Бойко С.С. *Начальные сведения о понятии функции (отображения)*. - Харьков: ХНУ ім. В.Н.Каразіна, 2004 (методические указания и зачётные задания по математическому анализу).
- 4. Сердюк Г.П., Рыжий В.С., Ніколенко І.Г. *Построение плоских кривых*. - Харьков: ХНУ ім. В.Н.Каразіна, 2008, 88 с. (учебно-методическое пособие по математическому анализу).

ВИЩА МАТЕМАТИКА

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Матриці, визначники та системи лінійних рівнянь

Тема 1.1 Матриці. Подібні, симетричні, несиметричні, ортогональні, транспоновані та блокові матриці

Тема 1.2 Дії над матрицями. Многочлени від матриць.

Тема 1.3 Визначники матриці. Властивості та обчислення визначників 2-го і 3-го порядків.

Тема 1.4 Мінори, алгебраїчні доповнення. Обернена матриця

Тема 1.5 Ранг матриці. Елементарні перетворення матриці

Тема 1.6 Рішення систем лінійних рівнянь матричним методом. Правило Крамера, метод Гаусса

Тема 2. Елементи векторної алгебри та теорії лінійних просторів

Тема 2.1 Вектори. Операції над векторами. Колінеарні і компланарні вектори.

Тема 2.2 Лінійні простори. Лінійна залежність векторів. Базис і розмір лінійного простору.

Тема 2.3 Координати вектора. Проекція вектора на вісь. Модуль вектора. Напрявлені косинуси.

Тема 2.4 Скалярний добуток векторів. Евклідів простір. Довжина вектора. Нерівність Коші-Буняковського. Кут між векторами. Ортогональність векторів.

Тема 2.5 Перетворення координат. Матриця переходу. Ортогональні перетворення. Орієнтація базисів, орієнтація простору.

Тема 2.6 Векторний та мішаний добуток векторів. Полярна, циліндрична і сферична системи координат. Формули переходу.

Тема 2.7 Власні числа та власні вектори матриць. Методи їх знаходження.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Матриці, визначники та системи лінійних рівнянь

Тема 1.1 Матриці. Подібні, симетричні, несиметричні, ортогональні, транспоновані та блокові матриці

Визначення. Прямокутна таблиця чисел a_{ij} (дійсних: $a_{ij} \in \mathbb{R}$ або комплексних: $a_{ij} \in \mathbb{C}$) виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

що складається з m рядків і n стовпчиків (відповідно з mn членів), називається **матрицею**.

Числа a_{ij} називаються **елементами матриці**. Перший індекс i позначає номер рядка, а другий індекс j – номер стовпчика. Елементи $a_{i1}, \dots, a_{in}$ складають i -й рядок матриці, а елементи $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ – j -й стовпчик матриці; a_{ij} – елемент матриці, який знаходиться в i -му рядку та j -му стовпчику. Якщо всі елементи матриці – дійсні числа ($a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$), то матриця називається **дійсною**.

Матриця, що складається з одного рядка, називається **матрицею-рядком** або **рядковою**

матрицею. Така матриця має вигляд $[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]$. Матриця $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, що складається з

одного стовпчика, називається **матрицею-стовпчиком** або **стовпчиковою матрицею**. Рядки та стовпчики матриці називають її **рядами**. Під двома паралельними рядами будуть

мати на увазі два рядки або два стовпчики матриці. Матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ має mn

елементів. Її називають також $m \times n$ -матрицею або матрицею з розмірами $m \times n$ (m на n). Якщо хочуть вказати розміри матриці пишуть $A_{m \times n}$.

Визначення. Дві матриці називаються **рівними**, якщо вони однакових розмірів та елементи однієї матриці дорівнюють відповідним елементам іншої. Таким чином:

$$A_{m \times n} = B_{p \times r} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} m = n, n = r \wedge a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (A_{m \times n} = (a_{ij}), B_{p \times r} = (b_{nm}))$$

Визначення. Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців ($m = n$), називається **квадратною**. **Порядком** квадратної матриці називається число її рядків (або стовпчиків).

У квадратній матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ становлять **головну**

діагональ, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ – **побічну діагональ**.

Визначення. **Нульовою матрицею** називається матриця, всі елементи якої дорівнюють

нулю: $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Визначення. **Діагональною матрицею** називається квадратна матриця, у якої всі елементи, які стоять не на головній діагоналі, дорівнюють нулю, тобто матриця виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ якщо } i \neq k, \text{ то } a_{ik} = 0.$$

Визначення. Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює

одиниці, називається **одиничною** і позначається буквою $E(I)$: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Одиничну матрицю порядку n позначають E_n . Якщо ввести **символ Кронекера**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \text{ то } E = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначення. Квадратна матриця називається **трикутною**, якщо всі її елементи, розташовані по одну сторону від головної діагоналі дорівнюють нулю. При цьому

матрицю виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називають **верхньою трикутною**, а матрицю виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{нижньою трикутною}.$$

Матриця довільних розмірів називається **трапецеподібною**, якщо вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{rr} \text{ відмінні від нуля.}$$

ТРАНСПОНУВАННЯ МАТРИЦЬ

Визначення. Матриця, отримана з даної заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається *матрицею, транспонованою до даної*. Матрицю транспоновану до матриці A , будемо позначати A' або A^T . Таким чином, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операция знаходження матриці, транспонированной до данной, називається *транспонуванням матриці*.

Зауваження. Если $A_{m \times n}$, то $A^T_{n \times m}$.

Властивості:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доведення: Властивості 1) - 3) очевидні.

4) Ліва частина має сенс, якщо A узгоджена з B . Нехай $A = A_{m \times n}$, $B = B_{n \times l}$. Тоді $A' = A'_{n \times m}$ і $B' = B'_{l \times n}$, тобто B' узгоджена з A' і добуток $B'A'$ має сенс. $(AB)_{m \times l} \Rightarrow (AB)^T_{l \times m} (B^T A^T)_{l \times m}$ — матриці мають однакові розміри.

Покажемо, $(AB)^T = B^T A^T$. Нехай $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times l}$.

Позначимо $C = AB = (c_{ij})_{m \times l}$, де $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$, ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, l$) та $A^T = (a_{ij}^T)_{n \times m}$,

$B^T = (b_{ij}^T)_{l \times n}$, $C^T = (c_{ij}^T)_{l \times m}$, $D = B^T A^T = (d_{ij})_{l \times m}$.

Маємо: $a_{ij}^T = a_{ji}$, $b_{ij}^T = b_{ji}$, $c_{ij}^T = c_{ji}$,

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^n b_{is}^T a_{sj}^T = \sum_{s=1}^n b_{si} a_{js} = \sum_{s=1}^n a_{js} b_{si} = c_{ji} = c_{ij}^T \quad (i=1, \dots, l; j=1, \dots, m).$$

Таким чином, елементи матриці D і C^T відповідно рівні, тому $C^T = D$, тобто $(AB)^T = B^T A^T$. ▲

Таким чином, при транспонуванні добутока 2-х матриць співмножники транспонуються та міняються місцями.

Для добутку 3-х матриць: $(ABC)^T = ((AB) \cdot C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$.

Аналогічно: $(A_1 A_2 \dots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \dots A_2^T A_1^T$.

Визначення. Квадратна матриця B називається *оберненою* по відношенню до матриці A з такими ж розмірами, якщо $AB = BA = E$. Обернена матриця позначається A^{-1} . Таким чином $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E$.

Зауваження. Обернена матриця існує не завжди. Матриці, для яких обернена матриця існує, називаються *невиродженими* (або *регулярними*, *неособливими*), а для яких не існує – *виродженими* (або *сингулярними*, *особливими*).

Визначення. *Симетричною* називають квадратну матрицю, елементи якої симетричні відносно головної діагоналі, тобто, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i \neq j$. Це означає, що якщо A – симетрична матриця, то $A = A^T$. Матриця називається *кососиметричною* (*антисиметричною*), якщо $A^T = -A$, тобто $a_{ik} = -a_{ki}$.

Визначення. *Ортогональною матрицею* називається квадратна матриця A з дійсними елементами, результат множення якої на A^T дорівнює одиничній матриці, тобто A – ортогональна, тоді коли $AA^T = A^T A = E$. Таким чином, для ортогональної матриці ми отримуємо, що $A^{-1} = A^T$.

Визначення. Квадратні матриці A і B однакового порядку називаються *подібними*, якщо існує невинорджена матриця P такого ж порядку, така, що $B = P^{-1}AP$. Якщо дві матриці подібні і при цьому одна з них діагональна, то про другу кажуть, що вона може бути *діагоналізована*.

Визначення. Якщо елементи матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ замінити на комплексно-спряжені їм, то отримаємо матрицю $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{m \times n}$ яку називають *комплексно-спряженою* з матрицею A .

Визначення. *Ермітово-спряжена матриця* або *спряжено-транспонована матриця* – це матриця A^* з комплексними елементами, яка отримана з вихідної матриці A транспонуванням і заміною кожного елемента комплексно-спряженим йому: $A^* = (\bar{A})^T$.

Якщо матриця A складається з дійсних чисел, то ермітово-спряжена до неї матриця – це просто транспонована матриця: $A^* = A^T$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (тому що, $A = \bar{A}$).

Визначення. Квадратна матриця називається

ермітовою, якщо $A^* = A$;

антіермітовою, якщо $A^* = -A$;

нормальною, якщо $A^* A = A A^*$;

унітарною, якщо $A^* A = A A^* = E$.

Властивості:

- 1) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
- 2) $(CA)^* = \bar{C}A^*$;
- 3) $(AB)^* = B^*A^*$;
- 4) $(A^*)^* = A$;
- 5) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Визначення. *Ермітова* (або *самоспряжена* матриця) – це квадратна матриця з комплексними елементами, яка будучи транспонованою є комплексно-спряженою $A^T = \bar{A}$.

- Властивості:**
- 1) Ермітова матриця є нормальною;
 - 2) Діагональні елементи ермітової матриці дійсні;
 - 3) Дійсна ермітова матриця є симетричною.

БЛОЧНІ МАТРИЦІ

Досі ми розглядали матриці, елементами яких є числа. Можна розглядати матриці, елементами яких в свою чергу є матриці. До таких матриць відносяться блокові матриці.

Нехай задана матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Розіб'ємо її горизонтальними і вертикальними

прямими на ряд матриць. Отримані при цьому матриці називаються *блоками (клітинами)* матриці A . Дану матрицю можна записати у вигляді матриці, елементами якої є блоки. У цьому випадку будемо казати, що матриця записана у вигляді *блокової матриці*. Очевидно, що дана матриця може бути записана у вигляді блокової матриці не єдиним способом.

Визначення. Кажуть, що дві матриці одних і тих же розмірів *однаковим чином розбиті на блоки*, якщо їх відповідні блоки мають однакові розміри.

Лінійні операції (тобто, додавання, віднімання та множення на число) над блоковими матрицями можуть бути зведені до відповідних операцій над блоками (при додаванні та відніманні матриці повинні бути однаковим чином розбиті на блоки). Для множення блокових матриць вводиться поняття *узгодженості блокових матриць*.

Визначення. Блочна матриця $A_{\mu \times \nu}$ називається *узгодженою* з блочною матрицею $B_{\chi \times \lambda}$, якщо $\nu = \chi$ і блоки i -го рядка матриці A узгоджені з відповідними блоками j -го стовпця матриці B ,

$$\forall i=1, \dots, \mu; j=1, \dots, \lambda \quad \left(C_{ij} = \sum_{s=1}^{\nu} A_{is} B_{sj} \right).$$

Якщо матриці $A_{\mu \times \nu}$ і $B_{\chi \times \lambda}$, узгоджені, тоді їх добуток $AB = C$ може бути представлено у вигляді блокової матриці $C_{\mu \times \lambda}$, блок якої, стоїть в i -му рядку та j -му стовпці, є матриця, яка дорівнює сумі добутків блоків i -го рядка матриці $A_{\mu \times \nu}$ та j -го стовпця матриці $B_{\chi \times \lambda}$.

ДОДАВАННЯ МАТРИЦЬ

Зауваження. Операція додавання вводиться тільки для матриць однакових розмірів.

Визначення. Сумою двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij})$ така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$). Сума матриць A і B позначається $A + B$;

Сума $A + B + C$ трьох матриць – матриця, яка виходить послідовним додаванням даних матриць, тобто $A + B + C = (A + B) + C$.

Аналогічно визначається $A_1 + A_2 + \dots + A_n$, $n > 3$.

МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ НА ЧИСЛО

Визначення. Добуток матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число α (або числа α на матрицю $A_{m \times n} = (a_{ij})$) називається матриця $B_{m \times n} = (b_{ij})$, така, що $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$).

Матрицю $(-1)A$ будемо називати *протилежною матрицею* до A і позначати $-A$.

Властивості додавання матриць і множення на число:

- 1) $A + B = B + A$ (комутативність додавання);
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоціативність додавання);
- 3) $A + 0 = A$;
- 4) $A + (-A) = 0$;
- 5) $1 \cdot A = A$;
- 6) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (асоціативність відносно множення чисел);
- 7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$ (дистрибутивність множення на число щодо складання матриць);
- 8) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивність множення на матрицю щодо додавання чисел);

Різницю матриць $A - B$ можна визначити наступним чином: $A - B \stackrel{\text{def}}{=} A + (-B)$.

ДОБУТОК МАТРИЦЬ

Визначення. Матрицю $A = (a_{ij})_{m \times n}$ будемо називати *узгодженою* з матрицею $B = (b_{ij})_{p \times r}$, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B , тобто $n = p$.

Зауваження. З узгодженості матриці A з B не випливає, взагалі кажучи, узгодженість B з A .

Приклад. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}.$

Матриця A узгоджена з B тому, що число стовпців матриці A дорівнює 3 і дорівнює числу рядків матриці B , але матриця B не узгоджена з A , тому що матриця B має 1 стовець, а число рядків матриці A дорівнює 2. Матриця C узгоджена з A , тому що, число стовпців C дорівнює 2 і збігається з кількістю рядків A . Матриця A не узгоджена з C , тому що число стовпців A дорівнює 3, а число рядків C – 4. Матриця B не узгоджена з C , тому що матриця B має 1 стовець, а C – 4 рядки. Матриця C не узгоджена з B тому що стовпців у матриці C два, а рядків у B три.

Зауваження. Якщо A і B – квадратні матриці однакового порядку, то A узгоджена з B і B узгоджена з A .

Добуток матриці A на матрицю B вводиться тільки в разі, коли матриця A узгоджена з матрицею B , тобто якщо $A_{m \times n}$, то $B_{n \times k}$.

Визначення. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ на матрицю $B_{n \times k} = (b_{ij})_{n \times k}$ називається матриця $C_{m \times k} = (c_{ij})_{m \times k}$ така, що $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, $(c_{ij}) = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}$

Добуток матриці A на матрицю B позначається AB . (c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B).

Зауваження 1. Якщо матрицю A можна помножити на матрицю B , то звідси не випливає, що матрицю B можна помножити на матрицю A (це випливає з узгодженості);

2. Якщо матрицю A можна помножити на матрицю B , а матрицю B помножити на матрицю A , то, взагалі кажучи, $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці називаються **перестановочними** або **комутативними**;

3. Добуток двох ненульових матриць може бути нульовою матрицею (для добутку чисел цього бути не може).

Якщо матриця A узгоджена з матрицею B , а матриця (AB) узгоджена з матрицею C , то під добутком ABC трьох матриць розуміємо $ABC = (AB)C$ – матриця, отримана послідовним множенням матриць.

Властивості добутків матриць:

1. $(AB)C = A(BC)$ – асоціативність множення;
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ позначається αAB ;
3. $(A+B)C = AC + BC$ – дистрибутивність множення на матрицю справа щодо складання матриць;
4. $C(A+B) = CA + CB$ – дистрибутивність множення на матрицю зліва щодо складання матриць;

Доведення. 1) Ліва частина має сенс, якщо A узгоджена з B , а (AB) узгоджена з матрицею C , тобто якщо $A_{m \times n}$, $B_{n \times k}$, $C_{k \times l}$, тоді матриця $(AB)C$ має розміри $m \times l$. Тоді і матриця $A_{m \times n}(BC)_{n \times l}$ має розміри $m \times l$. Позначимо через $F = (AB)C$, а $\tilde{F} = A(BC)$.

Покажемо, що $F = \tilde{F}$ або $f_{ir} = \tilde{f}_{ir}$. Нехай $D_{m \times k} = A_{m \times n}B_{n \times k}$, тоді $d_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}$, $f_{ir} = \sum_{j=1}^k d_{ij}c_{jr}$.

Тоді

$$f_{ir} = \sum_{j=1}^k c_{jr} \left(\sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} \right) = \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}c_{jr} = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^k a_{is}b_{sj}c_{jr} = \sum_{s=1}^n a_{is} \sum_{j=1}^k b_{sj}c_{jr} = \sum_{s=1}^n a_{is}g_{sr}$$

де $g_{sr} = \sum_{j=1}^k b_{sj}c_{jr}$ – елемент матриці $G = BC$. Таким чином, $f_{ir} = \sum_{s=1}^n a_{is}g_{sr} = \tilde{f}_{ir}$. ▲

МНОГОЧЛЕНИ ВІД МАТРИЦЬ

Визначення. Нехай A – квадратна матриця. **Цілим додатнім степенем A^k ($k > 1$) квадратної матриці A** називається добуток k матриць, кожна з яких дорівнює A : $A^k \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (k раз). Очевидно, що матриця A^k має той же порядок, що і матриця A .

Визначення. **Нульовим степенем A^0 квадратної матриці A ($A \neq 0$)** називається одинична матриця E того ж порядку, що і A , тобто, $A^0 = E_n$.

Першим степенем A^1 матриці A називається сама матриця A , тобто $A^1 = A$.

Визначення. **Многочленом або поліномом степеня k** (k – ціле невід'ємне число) від квадратної матриці A називається вираз виду $\alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \alpha_2 A^{k-2} + \dots + \alpha_k A^0$, де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – будь-які числа, причому $\alpha_0 \neq 0$. Позначимо многочлен від матриці A через $P(A)$. Таким чином, $P(A) = \alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \dots + \alpha_k E$.

Зауваження. З визначення випливає, що многочлен від матриці може бути отриманий, якщо в звичайний многочлен $P(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_k x^0$ замість x підставити квадратну матрицю.

Нехай є многочлен $P(x)$. Якщо $P(A)$ – нульова матриця, тобто $P(A) = 0$, то матриця A називається **коренем многочлена $P(x)$** , а многочлен $P(x)$ – анулюючим для матриці A .

Тема 1.3 Визначники матриці. Властивості та обчислення визначників 2-го і 3-го порядків

Визначення. **Перестановкою з n натуральних чисел $1, 2, \dots, n$** називається будь-яке їх розташування в певному порядку. Довільну перестановку з n чисел будемо записувати у вигляді $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, де кожне α_i – одне з чисел $1, 2, \dots, n$ і $\alpha_i \neq \alpha_j$. Дві перестановки з n чисел вважаються різними, якщо вони відрізняються розташуванням хоча б одного числа.

Приклад. $(1, 2, 5, 4, 3)$ і $(1, 2, 4, 5, 3)$ – різні перестановки з чисел $1, 2, 3, 4, 5$. Взагалі число різних перестановок з чисел $1, 2, 3, \dots, n$ дорівнює $n!$ (тому що на 1-му місці можна помістити будь-яке із n чисел, на другому – будь-яке із числа $(n-1)$ і т.д.)

Визначення. Два числа утворюють *інверсію* в перестановці, якщо більше число стоїть перед меншим. Так, у перестановці (1, 2, 5, 4, 3) інверсію утворюють пари 5 і 4, 5 і 3, 4 і 3, тобто в даній перестановці 3 інверсії. Число інверсій у перестановці $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ позначається $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Зауваження. Якщо числа в перестановці записані в порядку зростання, то число $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ інверсій дорівнює 0.

Визначення. Якщо число інверсій у перестановці парне, то вона називається *парною*; якщо непарне, то вона називається *непарною*.

Якщо в даній перестановці поміняти місцями два числа α_i і α_j за умови, що інші числа залишаються на своїх місцях, то кажуть, що нова перестановка отримана з даної *транспозицією* чисел α_i і α_j .

Дві перестановки мають *різний характер парності*, якщо одна з них – парна, а інша – непарна.

Твердження.1) Дана перестановка і перестановка, отримана з неї однією транспозицією, мають *різний характер парності*.

2) З будь-якої перестановки $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ може бути отримана перестановка $(1, \dots, n)$ за допомогою послідовного застосування скінченного числа транспозицій.

Поняття визначника матриці вводиться тільки для квадратної матриці.

Розглянемо квадратну матрицю A n -го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Розглянемо добуток

елементів матриці A , яких взяли по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Будь-який такий добуток буде містити n співмножників і може бути записаний у вигляді $\alpha_{1\alpha_1} \alpha_{2\alpha_2} \dots \alpha_{n\alpha_n}$, де для зручності співмножники розташовані так, що перші індекси (номери рядків) будуть йти в порядку зростання, а другі індекси $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (номера стовпців) є натуральними числами $1, 2, \dots, n$, які розташовані у деякому порядку. Таким чином, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – перестановка з n натуральних чисел $1, 2, \dots, n$.

Два добутки виду $\alpha_{1\alpha_1} \alpha_{2\alpha_2} \dots \alpha_{n\alpha_n}$ будемо вважати *різними*, якщо відповідні перестановки $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ інших індексів різні. Різних добутків буде стільки, скільки можна скласти різних перестановок з n чисел, тобто, $n!$.

Далі будемо розглядати тільки різні добутки. Помноживши кожне з $n!$ цих добутків на $(-1)^{k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$: $(-1)^{k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \alpha_{1\alpha_1} \dots \alpha_{n\alpha_n}$.

Визначення. Сума $\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (-1)^{k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \alpha_{1\alpha_1} \dots \alpha_{n\alpha_n} n!$ добутків виду $(-1)^{k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \alpha_{1\alpha_1} \dots \alpha_{n\alpha_n}$

називається *визначником матриці* A порядку n . Кожне з виразів $(-1)^{k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \alpha_{1\alpha_1} \dots \alpha_{n\alpha_n}$ називається *членом визначника*.

Визначник матриці A порядку n називається **визначником n -го порядку** і визначається

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ або } |A|, \Delta, \det A, \det(a_{ij}), \det(a_{ij})_n.$$

Визначник ще називають **детермінантом**.

Таким чином: $\det A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (-1)^{k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \alpha_{1\alpha_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{n\alpha_n}$. Зауважимо, що визначник матриці є числом, тому що, ми розглядаємо матриці, елементами яких є числа. Так само, як і для матриці, рядки і стовпці визначника називаються його **рядами**.

Розглянемо окремі випадки:

1) $n = 1$: $A_1 = (a_{11})$, $\det A = (-1)^{k(\alpha_1)} \alpha_{1\alpha_1}$ тут $\alpha_1 = 1$ і $k(\alpha_1) = 0$. Отже, $\det A_1 = \det(a_{11}) = a_{11}$. Таким чином, отримуємо: $|a_{11}| = a_{11}$.

2) $n = 2$: $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ згідно з визначенням містить $2! = 2$ доданків. Маємо перестановки $(1, 2)$, $(2, 1)$, тоді $k(1, 2) = 0$; $k(2, 1) = 1$. Отримуємо,

$$\det A_2 = (-1)^{k(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{k(2,1)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \text{ Таким чином, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

3) $n = 3$: $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Визначник матриці A_3 містить $3! = 6$ доданків. Розглянемо

6 різних перестановок $(1, 2, 3)$; $(2, 3, 1)$; $(3, 1, 2)$; $(2, 1, 3)$; $(1, 3, 2)$; $(3, 2, 1)$, тоді $k(1, 2, 3) = 0$, $k(2, 3, 1) = 2$, $k(3, 1, 2) = 2$, $k(2, 1, 3) = 1$, $k(1, 3, 2) = 1$, $k(3, 2, 1) = 3$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \det A_3 &= (-1)^{k(1,2,3)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{k(2,3,1)} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{k(3,1,2)} a_{13} a_{11} a_{32} + \\ &+ (-1)^{k(2,1,3)} a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^{k(1,3,2)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{k(3,2,1)} a_{13} a_{22} a_{31} = \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{11} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \end{aligned}$$

ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1) Визначник матриці отриманої з даної транспонуванням, дорівнює визначнику даної матриці: $\det A^T = \det A$.

2) Якщо всі елементи деякого ряду визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює 0.

3) Якщо всі елементи деякого ряду визначника мають загальний множник, то його можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Наслідок: Якщо матриця B отримана з матриці A множенням деякого ряду на число λ , то $\det B = \lambda \det A$.

4) Якщо матриця B отримана з матриці A перестановкою двох паралельних рядів, то $\det A = -\det B$ (тобто при перестановці 2-х рядків (або 2-х стовпців) місцями визначник змінює знак).

5) Якщо матриця A має два однакових паралельних ряди, то $\det A = 0$.

6) Якщо матриця A має два паралельних пропорційних ряди, то $\det A = 0$.

7) Визначник, у якого кожен елемент деякого ряду є сумою двох доданків, дорівнює сумі 2-х визначників, у першого з яких у зазначеному ряді стоять перші доданки, а у другому – другі доданки; інші ряди, паралельні вказаному, у всіх визначників однакові:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a'_{1j} + a''_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a'_{2j} + a''_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a'_{nj} + a''_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a'_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a'_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a'_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a''_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a''_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a''_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8) Якщо матриця B отримана з матриці A додаванням до деякого ряду іншого, паралельного йому ряду, помноженого на деяке число λ , то $\det B = \det A$.

Тема 1.4 Мінори, алгебраїчні доповнення. Обернена матриця

Розглянемо прямокутну матрицю $A_{m \times n}$. Виберемо в ній довільним чином s рядків і s стовпців, причому кожен рядок і кожен стовець можуть бути обрані лише один раз ($1 \leq s \leq \min(m, n)$, де $\min(m, n)$ – менше з чисел m і n). Елементи які стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку s . Визначник цієї

матриці називається **мінором** порядку s цієї матриці. Для квадратної матриці поряд з поняттям мінору вводиться поняття додаткового до нього мінору.

Визначення. Нехай дана квадратна матриця порядку n і її мінор M порядку s ($1 \leq s \leq n$). **Мінором M' додатковим до мінору M** , називається визначник матриці, що залишився після викреслювання тих s рядків і s стовпців даної матриці, які входять в мінор M .

Очевидно, що додатковим до мінору M' буде мінор M .

Приклад. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$. Розглянемо 2 і 3 рядки та 3 і 4 стовпець, отримуємо мінор $M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$. Додатковим мінор до M буде мінор $M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$.

Мінори квадратної матриці називаються також **мінорами її визначника**.

Визначення. **Алгебраїчним доповненням мінору** називається додатковий до нього мінор, помножений на $(-1)^\alpha$, де α – сума номерів рядків і стовпців даної матриці, які входять у розглянутий мінор.

Приклад. У розглянутому раніше випадку M^* – алгебраїчне доповнення мінору M , за визначенням $M^* = M'(-1)^{2+3+3+4} = M'$, отже отримуємо $M^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$.

Зауваження. Кожен елемент a_{ij} квадратної матриці n -го порядку є мінором 1-го порядку. Додатковий до нього мінор є визначником порядку $(n-1)$. Цей додатковий мінор будемо називати **мінором елемента a_{ij}** і позначати M_{ij} .

Визначення. **Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij}** називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема про розкладання визначника за елементами деякого ряду (рядка чи стовпчика): Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів деякого його ряду на алгебраїчні доповнення цих елементів.

для i -го рядка: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, 1 \leq i \leq n$;

j -го стовпця: $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, 1 \leq j \leq n$.

Теорема Лапласа: Визначник порядку n дорівнює сумі добутків всіляких мінорів k -го порядку ($k < n$), які можна скласти з довільно обраних k паралельних рядів, на алгебраїчні доповнення цих мінорів.

Теорема заміщення: Сума добутків довільних n чисел $d_1, d_2, \dots, d_n$ на алгебраїчні доповнення елементів деякого ряду матриці порядку n дорівнює визначнику матриці, яка виходить з даної заміною елементів зазначеного ряду на числа $d_1, d_2, \dots, d_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ d_{i1} & d_{i2} & \dots & d_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } d_1 A_{i1} + d_2 A_{i2} + \dots + d_n A_{in} = \det A_i$$

Доведення очевидно, розклавши $\det A_i$ за елементами i -го рядка.

Теорема анулювання: Сума добутків елементів одного з рядів матриці на алгебраїчні доповнення елементів іншого, паралельного йому ряду, дорівнює нулю.

Доведення (для рядків). Покажемо, що $a_1 A_{i1} + a_2 A_{i2} + \dots + a_n A_{in} = 0$, де $i \neq k$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq k$. Так як ліва частина рівності є сума добутків алгебраїчних доповнень елементів k -го рядка матриці A на числа $a_{i1}, \dots, a_{in}$, то по теоремі заміщення ця сума є визначник $\det A_i$, де A_i – матриця отримана з A шляхом заміни елементів k -го рядка числами $a_{i1}, \dots, a_{in}$, тобто елементами i -го рядка. Отже, визначник $\det A_i$ має 2 однакові рядки, а значить $\det A_i = 0$. Для стовпців доводиться аналогічно. ▲

Зауваження: 1) Теорема про розкладання визначника за елементами рядка або стовпця (ряду) дозволяє звести обчислення визначника n -го порядку ($n > 1$) до обчислення n визначників порядку $n-1$. Якщо визначник має в деякому ряді рівні 0 елементи, то зручніше розкласти визначник за елементами цього ряду (тобто того ряду, який містить найбільшу кількість нулів).

2) Використовуючи властивості визначника, можна перетворити визначник n -го порядку так, щоб всі елементи деякого ряду за винятком, можливо одного, дорівнювали нулю. Таким чином, обчислення визначника n -го порядку, якщо він відмінний від 0, зводиться до обчислення визначника порядку $n-1$.

3) Якщо привести визначник до трикутного вигляду, тобто $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ або

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, то $\Delta_1 = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \Delta_2$. Зокрема, $\det E = 1$.

4) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, де A і B – квадратні матриці однакового порядку.

5) Теорема Лапласа дозволяє звести обчислення визначників порядку n до обчислення визначників більш низьких порядків. Цією теоремою зручно користуватися тоді, коли в

визначнику є рівні нулю мінори. В цьому випадку при обчисленні визначника зручно виділяти в ньому ті k рядків або стовпців, які містять найбільшу кількість мінорів k -го порядку, що дорівнюють нулю.

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Визначення. Матриця B називається *оберненою до квадратної матриці* A , якщо $AB = BA = E$, де E – одинична матриця. Позначається $B = A^{-1}$ ^{def}. Таким чином, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Визначення. *Невиродженою* або *неособливою* матрицею називається квадратна матриця, визначник якої відмінний від нуля. Якщо визначник матриці дорівнює 0, то матриця називається *виродженою* або *особливою*.

Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Визначення. Матрицею, *союзною* або *приєднаною* до матриці A , називається матриця

виду $C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елементів a_{ij} матриці A (у

матриці C алгебраїчні доповнення до елементів i -го рядка A розташовані в i -му стовпці).

Позначається: $C = A^*$.

Лемма. Якщо A – квадратна матриця порядку n , а C – приєднана (союзна) до неї матриця, то $A \cdot C = C \cdot A = E \det A$, де E – одинична матриця порядку n .

Доведення. Нехай $D = AC$, тобто

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

За визначенням добутку матриць

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot A_{sj} = a_{i1}A_{1j} + a_{i2}A_{2j} + \dots + a_{in}A_{nj} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}, \quad C_{sj} = A_{js},$$

при $i = j$: $d_{ii} = a_{i1}A_{1i} + a_{i2}A_{2i} + \dots + a_{in}A_{ni} = \det A$

$i \neq j$: d_{ij} – сума добутків елементів i -го рядка матриці A на алгебраїчні доповнення елементів j -го рядка, отже, за теоремою анулювання $d_{ij} = 0$, $i \neq j$. Отримуємо:

$$D = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = E \cdot \det A. \blacktriangle$$

Теорема 1. Для того щоб існувала матриця A^{-1} , обернена до матриці A , необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

Доведення. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Необхідність. $\exists A^{-1}$, тоді за визначенням $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, значить,

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1,$$

отже, за властивістю визначника $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, отримуємо $\det A \neq 0$.

Достатність. $\det A \neq 0$. Нехай матриця C приєднана до A . Покажемо, що $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C$. З

леми маємо: $AC = CA = E \cdot \det A$, звідки

$$\frac{1}{\det A} AC = \frac{1}{\det A} CA = E, \text{ тобто } A \left(\frac{1}{\det A} C \right) = \left(\frac{1}{\det A} C \right) A = E,$$

отже, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C$. $\blacktriangle$

Зауваження. З теореми 1 отримуємо $A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Теорема 2. Для невиродженої матриці існує єдина обернена матриця.

Доведення. Нехай B_1, B_2 — обернені до невиродженої матриці A . Тоді $AB_1 = E$, помножимо зліва на B_2 обидві частини, одержуємо $B_2 \cdot (A \cdot B_1) = B_2 \cdot E = B_2$.

З іншого боку $(B_2 \cdot A) \cdot B_1 = E \cdot B_1 = B_1$. Отже, $B_1 = B_2$. $\blacktriangle$

Властивості зворотних матриць:

Нехай $\det A \neq 0, \det B \neq 0$ тоді:

$$1) \det A^{-1} = \frac{1}{\det A};$$

$$2) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$3) (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k;$$

$$4) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Тема 1.5 Ранг матриці. Елементарні перетворення матриці

Визначення. Нехай $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. **Рангом матриці** називається найбільший

з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Якщо всі мінори матриці дорівнюють 0, то ранг матриці вважається рівним 0. Позначається $r(A)$.

З визначення випливає, що:

- 1) $0 \leq r \leq \min(m, n)$, де $\min(m, n)$ – найменше з чисел m і n ;
- 2) $r = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють 0;
- 3) Для квадратної матриці n -го порядку $r = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

Приклад: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ серед мінорів 1-го порядку є відмінний від нуля, значить

$r > 0$. Мінори 2-го і 3-го порядку дорівнюють 0, отже $r(A) = 1$.

4) Якщо всі мінори порядку k даної матриці дорівнюють 0, то всі мінори більш високого порядку так само рівні 0 (це випливає, наприклад, з теореми про розкладання визначника за елементами ряду). Таким чином, якщо всі елементи матриці (тобто всі мінори 1-го порядку) дорівнюють 0, то $r = 0$. Якщо хоча б один елемент матриці відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють 0, то $r = 1$. Якщо є хоча б один мінор другого порядку який не дорівнює 0, то досліджуємо мінори третього порядку. Так чинимо доки: або всі мінори порядку k дорівнюють 0, або мінори порядку k не існують. Тоді $r = k - 1$.

Властивості рангу матриці:

- 1) Ранг матриці, отриманої з даної викреслюванням якогось ряду, дорівнює рангу даної матриці або менше його на одиницю.
- 2) Ранг матриці, отриманої з даної приписуванням до неї ряду, елементами якого є довільні числа, дорівнює рангу вихідної матриці або більше його на одиницю.
- 3) Якщо викреслити з матриці або приписати до неї ряд, всі елементи якого дорівнюють 0, то ранг матриці не зміниться.
- 4) Ранг матриці, отриманої з даної транспонуванням, дорівнює рангу даної матриці.

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦІ

Визначення. *Елементарними перетвореннями матриці* називаються перетворення:

- 1) множення деякого ряду матриці на число, відмінне від нуля;
- 2) додавання до одного ряду матриці іншого, паралельного йому ряду, помножене на довільне число;
- 3) перестановку місцями двох паралельних рядків матриці.

Якщо матриця B отримана з матриці A шляхом елементарного перетворення, будемо писати $A \rightarrow B$.

Властивості: 1. $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$;

2. $A \rightarrow B \Rightarrow B \rightarrow A$.

Лемма. Елементарне перетворення $A \rightarrow B \Rightarrow B \rightarrow A$, що полягає в перестановці 2-х паралельних рядів матриці, може бути отримано послідовним застосуванням перетворень 1) і 2).

Доведення. Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

а) Додамо до i -го стовпця A (-1) j -й стовпець:

$$A \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} - a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} - a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} - a_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

б) Додамо до j -го стовпця A_1 i -й стовпець:

$$A_1 \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} - a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} - a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} - a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

в) Додамо до i -го стовпця A_2 j -й стовпчик помножений на (-1) :

$$A_2 \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & -a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & -a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

г) помножимо i -й стовпець A_3 на (-1) . Таким чином, остання дія – за допомогою елементарних перетворень 1) і 2) поміняємо i -й і j -й стовпці

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \blacktriangle$$

Теорема 1. Будь-яке елементарне перетворення, яке робиться над стовпцями матриці A порядку n , еквівалентно множенню матриці A справа на матрицю, отриману з одиничної матриці порядку n за допомогою того ж елементарного перетворення.

Теорема 2. Будь-яке елементарне перетворення, яке робиться над рядками матриці A порядку n , еквівалентно множенню матриці A зліва на матрицю, отриману з одиничної матриці порядку n за допомогою того ж елементарного перетворення.

Теорема 3. Будь-яка невироджена матриця може бути приведена до одиничної матриці за допомогою елементарних перетворень тільки над стовпцями (рядками).

Наслідок. Будь-яка невироджена матриця може бути отримана з одиничної матриці шляхом елементарних перетворень тільки над стовпцями (рядками).

Теорема 4. (про інваріантність рангу матриці щодо елементарних перетворень). Ранг матриці, отриманої з даної елементарними перетвореннями дорівнює рангу даної матриці.

Або: Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці.

Ранг матриці інваріантний щодо елементарних перетворень.

Зауваження. Теорему 4 зручно використовувати при обчисленні рангу матриці. Для цього за допомогою елементарних перетворень дану матрицю перетворюють в матрицю, ранг якої легко знаходиться.

Приклад. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \cdot (-5) + III]{I \cdot (-3) + II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

трапецевидна матриця, $r = 2$.

Зауваження. Будь-яку ненульову матрицю за допомогою елементарних перетворень можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

це окремий випадок трапецевидної матриці. Ранг цієї матриці дорівнює числу її одиниць.

Теорема 5. Якщо матрицю A помножити зліва чи справа на невироджену матрицю B , то ранг отриманої матриці буде дорівнювати рангу матриці A , тобто, якщо $\det B \neq 0$, то $r_{AB} = r_{BA} = r_A$.

Доведення. Так як будь-яка невинроджена матриця може бути отримана з одиничної матриці шляхом елементарних перетворень тільки над стовпчиками, то множення матриці A справа на невинроджену матрицю B рівносильно застосуванню елементарних перетворень над стовпцями матриці A . Оскільки елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, то $r_{AB} = r_A$. ▲

ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ШЛЯХОМ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Раніше в теоремі 3 стверджувалося, що будь-яка невироджена матриця шляхом елементарних перетворень тільки над стовпцями або рядками наводиться до одиничної матриці.

Теорема 6. Якщо до одиничній матриці порядку n застосувати ті ж елементарні перетворення тільки над стовпцями (рядками) і в тому ж порядку, за допомогою яких невироджена матриця A порядку n приводиться до одиничної, то отримана при цьому матриця буде оберненою до матриці A .

Доведення. Нехай A – невироджена квадратна матриця порядку n . Здійснимо елементарні перетворення над стовпцями $A: A \rightarrow E$ і такіж, і в тому ж порядку перетворення $E \rightarrow A$, якщо $A \rightarrow A\tilde{A} = E$, то $\tilde{A} = A^{-1}$. Аналогічно над рядками $A \rightarrow \tilde{\tilde{A}}A = E$. ▲

Тема 1.6 Рішення систем лінійних рівнянь матричним методом. Правило Крамера, метод Гаусса

Визначення. Лінійною системою m рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається система виду

[illegible]

де a_{ij} , h_i , ($i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$) – числа. Зауважимо, що a_{ij} – коефіцієнт при невідомому x_j в i -му рівнянні системи, h_i – вільний член в цьому рівнянні.

Визначення. Матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ складена з коефіцієнтів при невідомих

системи (1.6.1), називається *матрицею* або *головною матрицею системи*, а матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & h_1 \end{pmatrix}, \text{ яка отримана з матриці } A \text{ приписуванням стовпчика з}$$

ВІЛЬНИХ ЧЛЕНІВ, НАЗИВАЄТЬСЯ *розширеною матрицею системи*.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_2 \end{pmatrix}$. Кожній системі (1.6.1) відповідає єдина пара матриць A і H , та навпаки. Систему (1.6.1) можна записати також у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.$$

Визначення. Матриця $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ називається *вектор-рішенням* даної системи.

Вирішити систему – значить з'ясувати сумісна вона або несумісна, і в разі сумісності знайти всі її рішення (безліч рішень).

Елементарними перетвореннями системи назовемо наступні перетворення:

- 1) множення деякого рівняння системи на число, відмінне від нуля;
- 2) додавання до одного рівняння системи іншого її рівняння, помноженого на довільне число;
- 3) перестановку місцями двох рівнянь системи.

ФОРМУЛИ КРАМЕРА

[illegible]

$AX = H$, тоді матриця A такої системи є квадратною матрицею порядку n .

Визначник даної матриці $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – визначник системи.

Якщо визначник системи відмінний від нуля $\Delta \neq 0$, то система називається **невиродженою**, якщо $\Delta = 0$ – **виродженою**. Якщо матриця A невинроджена, то єдина обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Помножимо зліва обидві частини рівняння $AX = H$ на матрицю A^{-1} , тоді $A^{-1}AX = A^{-1}H$. Так як $A^{-1}A = E$, $EX = X$ отримуємо $X = A^{-1}H$ – **матричний запис формул Крамера** або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ A_{1j} & \cdots & A_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_j \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Отже $\forall j (j=1,2,\dots,n)$ $x_j = \frac{1}{\Delta} (A_{1j}h_1 + A_{2j}h_2 + \dots + A_{nj}h_n)$, за теоремою заміщення $A_{1j}h_1 + A_{2j}h_2 + \dots + A_{nj}h_n = \Delta_j$, де Δ_j – визначник, отриманий з визначника Δ заміною j -го стовпця стовпцем з вільних членів системи. Таким чином,

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,2,\dots,n) \text{ – формули Крамера.}$$

Невинроджена система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдине рішення, яке може бути знайдено за формулами Крамера.

РІШЕННЯ ДОВІЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

При вирішенні довільних систем m лінійних рівнянь з n невідомими мають місце такі теореми:

Теорема Кронекера-Капеллі. Для сумісної системи (1.6.1) необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці $r_A = r_{\tilde{A}}$.

Доведення. Необхідність. Нехай система сумісна, доведемо, що ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ дорівнює рангу розширеної матриці } \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & h_m \end{pmatrix}, \text{ тобто}$$

$r_A = r_{\tilde{A}}$. Так як система сумісна, то є сукупність чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ така, що

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} c_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} c_n = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix},$$

тобто останній рядок матриці $\tilde{A}$ є лінійною комбінацією інших її стовпців. Віднімаючи з останнього стовпця матриці $\tilde{A}$ зазначену лінійну комбінацію інших стовпців, одержимо матрицю $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$. Ранг матриці $\tilde{A}_1$ дорівнює рангу матриці $\tilde{A}$ і рангу матриці A .

Достатність. Нехай $r_A = r_{\tilde{A}} = r$. Доведемо, що система сумісна. Так як $r_A = r_{\tilde{A}}$, то існує мінор M , який є базисним мінором як матриці A , так і матриці $\tilde{A}$. На підставі теореми про базисний мінор, останній стовпець матриці $\tilde{A}$ є лінійною комбінацією базисних стовпців, а отже, і всіх стовпців матриці A . Це означає, що існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такі, що

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \alpha_n,$$

отже, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є рішенням системи (1.6.1). Таким чином, система (1.6.1) сумісна. $\blacktriangle$

Теорема 1. Якщо ранг матриці сумісної системи дорівнює числу невідомих $r_A = n$, то система має єдине рішення.

Теорема 2. Якщо ранг матриці сумісної системи менше числа невідомих $r_A < n$, то множина рішень системи нескінченна.

З теорем 1 і 2 випливають наступні теореми:

Теорема 3. Якщо система має єдине рішення, то ранг матриці системи дорівнює числу невідомих $r_A = n$.

Теорема 4. Якщо множина рішень системи нескінченна, то ранг матриці системи менше числа невідомих $r_A < n$.

Визначення. Базисними невідомими сумісної системи, ранг матриці якої дорівнює r , назвемо r невідомих, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор. Решта невідомих – **вільні**.

Алгоритм рішення системи лінійних рівнянь:

1. Знаходимо r_A – ранг матриці системи і $r_{\tilde{A}}$ – ранг розширеної матриці. Якщо $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несумісна.
2. Якщо $r_A = r_{\tilde{A}} = r$, то виділяємо базисний мінор та базисні невідомі.
3. Дану систему замінюємо рівносильною їй системою, що складається з тих r рівнянь, до яких увійшли елементи базисного мінору.
4. Якщо число базисних невідомих дорівнює числу невідомих системи, то система має єдине рішення, яке можна знайти за формулами Крамера.

5. Якщо число базисних невідомих менше числа невідомих системи, то з системи, отриманої в пункті 3, знаходимо вираз базисних невідомих через вільні, використовуючи, наприклад, формули Крамера. Надаючи вільним невідомим довільні значення, отримаємо нескінченно багато рішень вихідної системи. Отже, невизначена система має нескінченно багато рішень.

СИСТЕМИ ОДНОРІДНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Визначення. Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо вільний член в кожному рівнянні дорівнює нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Зауваження. Система однорідних лінійних рівнянь є окремим випадком системи (1.6.1). Вона сумісна, так як $r_A = r_{\bar{A}}$, отже $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ – рішення системи.

Визначення. Рішення $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ називається *нульовим* або *тривіальним* рішенням, інші рішення – *нетривіальні*.

Зауваження. Однорідна система має лише тривіальне рішення тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює числу невідомих $r_A = n$. Зокрема, якщо число рівнянь дорівнює числу невідомих ($m = n$), то для того щоб система мала тільки тривіальне рішення, необхідно і достатньо, щоб визначник системи був відмінний від нуля.

Зауваження. Якщо $r_A < n$, то множина рішень нескінченна.

Визначення. Нехай $C_1, C_2, \dots, C_k$ – вектор-рішення системи однорідних лінійних рівнянь, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – деякі числа. Тоді $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_k C_k$ називається **лінійною комбінацією вектор-рішень** $C_1, C_2, \dots, C_k$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – коефіцієнтами цієї комбінації. Якщо $\sum_{i=1}^k |\alpha_i| = 0$, то лінійна комбінація називається **тривіальною**.

Визначення. Вектор-рішення $C_1, C_2, \dots, C_k$ називаються *лінійно-залежними*, якщо хоча б одне з них є лінійною комбінацією інших. В іншому випадку ці вектор-рішення називаються *лінійно-незалежними*.

Властивість 1. Будь-яка лінійна комбінація скінченного числа вектор-рішень системи однорідних лінійних рівнянь є вектор-рішенням цієї системи.

Властивість 2. Нехай для системи лінійних однорідних рівнянь $r < n$, де r – ранг матриці системи, n – число невідомих. Тоді існує $n-r$ лінійно-незалежних вектор-рішень $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ даної системи і будь-який вектор-рішення системи є лінійною комбінацією $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$.

Визначення. *Фундаментальною системою рішень* системи однорідних лінійних рівнянь називається сукупність максимального числа лінійно-незалежних вектор-рішень.

МЕТОД ГАУСА (МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ ВИКЛЮЧЕНЬ НЕВІДОМИХ)

Дана система m рівнянь з n невідомими:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = h_m \end{array} \right. \quad (1.6.3)$$

Серед коефіцієнтів при x_j є хоча б один, відмінний від нуля. Без обмеження спільності, можна вважати, що $a_{i1} \neq 0$. Виключимо невідоме x_1 з усіх рівнянь, крім першого (якщо такі є). Якщо $a_{i1} = 0$, то i -е рівняння не містить x_1 , якщо $a_{i1} = 0$, то до i -го ($i = 2, \dots, m$) рівняння системи, помноженому на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, додамо перше рівняння. Отримаємо систему виду:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= h_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= h_3^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n &= h_m^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.4)$$

еквівалентну системі (1.6.3). Перехід від системи (1.6.3) до системи (1.6.4) називається **першим кроком**. В результаті здійснення першого кроку можуть бути наступні випадки:

1) Серед рівнянь системи є хоча б одне таке, у якого всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють 0, а вільний член відмінний від 0, тоді системи несумісні.

2) $a_{ij}^{(1)} = h_i^{(1)} = 0$, тоді система (1.6.4) складається з першого рівняння $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1$, якщо $a_{1n} = 0$, $a_{11} \neq 0$, то система має єдине рішення, в іншому випадку вона невизначена.

3) Серед коефіцієнтів $a_{ij}^{(1)}$ хоча б один відмінний від нуля, тоді переходимо до другого кроку. Нехай $a_{22}^{(1)} \neq 0$, тоді виключимо x_2 з системи (1.6.4) починаючи з третього рівняння. Отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= h_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= h_3^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + \dots + a_{4n}^{(2)}x_n &= h_4^{(2)} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(2)}x_n &= h_m^{(2)} \end{aligned} \right\}$$

систему еквівалентну вихідній системі (1.6.3).

В результаті другого кроку отримуємо аналогічні випадки як і після першого, якщо має місце третій випадок, то переходимо до третього кроку. Продовжуємо цей процес, поки це можливо. Якщо виконаємо $(p-1)$ кроків, то отримуємо

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)} \\ c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n &= h_3^{(2)} \\ &\dots\dots\dots \\ d_{pp}x_p + \dots + d_{pn}x_n &= h_p^{(p-1)} \\ 0 &= h_{p+1}^{(p-1)} \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= h_m^{(p-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.5)$$

де $b_{2j} = a_{2j}^{(1)}$, $c_{3j} = a_{3j}^{(2)}$, ..., $d_{pj} = a_{pj}^{(p-1)}$.

Перехід від системи (1.6.3) до еквівалентної системи (1.6.5) називається **прямим ходом методу Гауса**. Можливі наступні випадки:

- 1) Хоча б одне з $h_{p+1}^{(p-1)}, \dots, h_m^{(p-1)}$ відмінно від нуля, тоді система (1.6.5), а отже і система (1.6.3) несумісні.
- 2) Всі $h_j^{(p-1)} = 0$ ($j = p+1, \dots, m$), то ліві і праві частини останніх $m-p$ рівнянь рівні 0.

Система (1.6.5) може мати такий вигляд:

Трикутний (при $p = n$):

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ l_{n-1n-1}x_{n-1} + l_{n-1n}x_n &= h_{n-1}^{(n-2)} \\ d_{nn}x_n &= h_n^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.6)$$

Трапецевидний (при $p < n$):

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ d_{pp}x_p + \dots + d_{pn}x_n &= h_p^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.6.7)$$

де $a_{11}, b_{22}, \dots, d_{pp}$ відмінні від нуля. Знаходження невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ з отриманих систем називається **зворотним ходом методу Гауса**.

Отримана система (1.6.6), а значить, і вихідна система мають єдине рішення. Так як $d_{nn} \neq 0$, то з останнього рівняння (1.6.6) x_n визначається єдиним чином. Підставляючи знайдене значення x_n в передостаннє рівняння, отримуємо єдине значення для x_{n-1} , так як $l_{n-1n-1} \neq 0$. Продовжуючи процес, знаходимо послідовність $x_{n-2}, \dots, x_1$.

В системі (1.6.7) число невідомих більше числа рівнянь. Так як $d_{pp} \neq 0$, то з останнього рівняння цієї системи x_p єдиним чином виражається через $x_{p+1}, \dots, x_n$. Здійснюючи зворотний хід, висловимо єдиним чином невідомі $x_{p-1}, x_{p-2}, \dots, x_1$ через $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$.

Надаючи останнім довільні значення $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_n$, отримаємо безліч рішень системи (1.6.7), а значить, і вихідної системи (1.6.3).

Зауваження. При застосуванні методу Гаусса на практиці зручніше перетворювати рядки розширеній матриці, тобто за допомогою елементарних перетворень над рядками приводити розширену матрицю системи до трапецевидної.

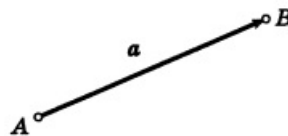
Тема 2. Елементи векторної алгебри та теорії лінійних просторів

Тема 2.1 Вектори. Операції над векторами. Колінеарні і компланарні вектори.

Визначення. Величина, повністю визначається своїм числовим значенням, називається *скалярною* або *скаляром*. Скаляр визначається числом додатнім або від'ємним, або рівним нулю.

Визначення. Напрявлений прямолінійний відрізок, тобто, відрізок, який має певну довжину і певний напрямок, називається *вектором*.

Вектор позначається символом $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$, де точка A – початок відрізка, а точка B – його кінець. Вектор $\overrightarrow{BA}$ (B – початок, A – кінець) називається протилежним вектору $\overrightarrow{AB}$, вектор протилежний вектору $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$. Геометрично вектор зображується напрямленим відрізком простору. (Мал. 2.1.1.)



Мал. 2.1.1

Визначення. *Модулем* або *довжиною* вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка, $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$.

Вектор 0 , модуль якого дорівнює 0 , називається *нульовим вектором* (нульовий вектор напрямку не має).

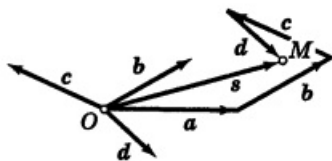
Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються *рівними*, якщо вони розташовані на паралельних або співпадаючих прямих і мають однакову довжину, і однакові напрямки. Рівні вектори називаються *вільними*. Іншими словами, вільний вектор допускає перенесення його в будь-яку точку простору за умови збереження довжини і напрямку.

Вектор, довжина якого дорівнює 1 , називається *одичним* вектором і позначається $\vec{e}$. Одичний вектор, напрямок якого збігається з напрямком $\vec{a}$, називається *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^0$.

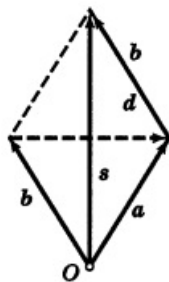
СУМА ВЕКТОРІВ

Визначення. Сумою декількох векторів, наприклад, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (мал. 2.1.2), називається вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ за величиною і напрямком рівний замикаючій просторовій ламаній лінії $\vec{OM}$ у побудованій на даних векторах.

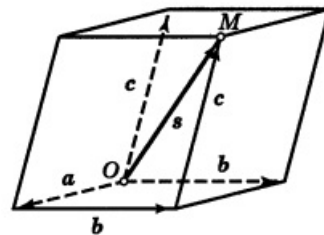
Для випадку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 2.1.3) їх сумою $\vec{s}$ є діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, яка виходить із загальної точки їх докладання (**правило паралелограма**).



Мал. 2.1.2



Мал. 2.1.3



Мал. 2.1.4

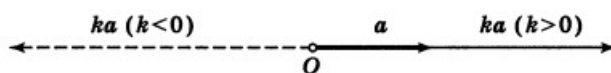
Так як в трикутнику довжина однієї сторони не перевищує суми довжин двох інших сторін, то з мал. 2.1.3 маємо $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, тобто модуль суми двох векторів не перевищує суми модулів цих векторів.

Для випадку трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (мал. 2.1.4) їх сумою $\vec{s}$ є діагональ $\vec{OM}$ паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (**правило паралелепіпеда**).

Легко перевірити, що для векторного додавання справедливі наступні **властивості**:

- 1) комутативність додавання $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, тобто векторна сума не залежить від порядку доданків;
- 2) асоціативність додавання $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, тобто сума трьох (і більшого числа) векторів не залежить від порядку розстановки дужок.

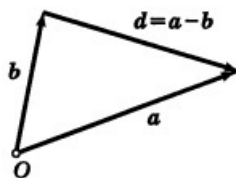
Для кожного вектора $\vec{a} = \vec{OA}$ (мал. 2.1.5) існує протилежний вектор $-\vec{a} = \vec{OA'}$, що має ту ж довжину, але протилежний зміст. За правилом паралелограма, очевидно, маємо $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, де $\vec{0}$ — нульовий вектор. Легко перевірити, що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.



Мал. 2.1.5

РІЗНИЦЯ ВЕКТОРІВ

Визначення. Під **різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (Мал. 2.1.6) розуміється вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$.



Мал. 2.1.6

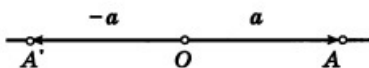
Відзначимо, що в паралелограмі, побудованому на даних векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (див. мал. 2.1.3), їх різницею є відповідно напрямлена друга діагональ паралелограма.

Легко перевірити, що справедливо наступне правило віднімання: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА СКАЛЯР

Визначення. Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр k (мал. 2.1.7) називається вектор, $\vec{b} = k\vec{a} \equiv \vec{ak}$, що має довжину $|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$, напрямком якого:

- 1) збігається з напрямком вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$;
- 2) протилежний, якщо $k < 0$;
- 3) довільний, якщо $k = 0$.



Мал. 2.1.7

Неважко переконатися, що ця векторна операція має наступні властивостями:

- 1) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}, k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- 2) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;
- 3) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}, 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (k, l – скаляри).

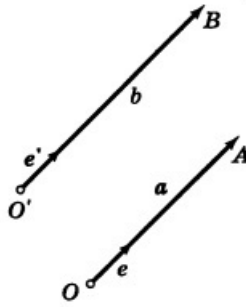
Приклад. $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$.

Якщо ненульовий вектор $\vec{a}$, розділити на його довжину $|\vec{a}|$, тобто помножити на скаляр $\frac{1}{|\vec{a}|}$, то отримаємо одиничний вектор $\vec{e}$ – орт, того ж напрямку: $\vec{e} = \vec{a} / |\vec{a}|$. Звідси маємо стандартну формулу вектора $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ

Визначення. Два вектора $\vec{a} = \vec{OA}$ і $\vec{b} = \vec{OB}$ (мал. 2.1.8) називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній і тій же прямій.

Так як напрямком нульового вектора довільний, то можна вважати, що нульовий вектор колінеарен будь-якому вектору.



Мал. 2.1.8

Теорема. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто $\vec{b} = k\vec{a}$ (k – скаляр).

Доведення. 1) Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$) колінеарні і $\vec{e}$, $\vec{e}'$ – їх орти. Маємо $\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{e}$ і $\vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{e}'$. Очевидно, $\vec{e}' = \pm \vec{e}$, де знак плюс відповідає векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однакового напрямку, а знак мінус – векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежного напрямку. Тоді, отримуємо $\vec{b} = \pm \vec{b} \cdot \vec{e} = \pm \frac{\vec{b}}{\vec{a}} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{e}) = \pm \frac{\vec{b}}{\vec{a}} \vec{a}$, а отже, $\vec{b} = k\vec{a}$, де $k = \pm \frac{\vec{b}}{\vec{a}}$.

2) Якщо виконана рівність $\vec{b} = k\vec{a}$, то колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ безпосередньо випливає зі змісту множення векторів на скаляр.

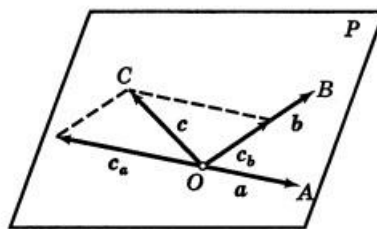
КОМПЛАНАРНІ ВЕКТОРИ

Визначення. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називаються **компланарними**, якщо вони паралельні деякій площині (тобто або паралельні площині, або лежать в ній).

Можна сказати також, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли після приведення їх до спільного початку вони лежать в одній площині. За змістом визначення трійка векторів, серед яких є хоча б один нульовий, компланарна.

Теорема. Три ненульових вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших, тобто $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ (k, l – скаляри).

Доведення. 1) Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, розташовані у площині P (мал. 2.1.9) і мають загальну точку прикладання O . Припустимо спочатку, що ці вектори не всі попарно колінеарні, наприклад, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Тоді, робляючи розкладання вектора $\vec{c}$ в суму векторів $\vec{c}_a$ і $\vec{c}_b$, колінеарних відповідно $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то $\vec{c} = \vec{c}_a + \vec{c}_b = k\vec{a} + l\vec{b}$, де k, l – відповідні скаляри.



Мал. 2.1.9

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ попарно колінеарні, то можна написати $\vec{c} = k\vec{a} = k\vec{a} + 0\vec{b}$; Таким чином, знову виконана умова $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

2) Навпаки, якщо для векторів $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (мал. 2.1.9) виконана умова $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$, то на підставі сенсу відповідних векторних операцій вектор $\vec{c}$ розташований у площині, що містить вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто ці вектори компланарні. ▲

Приклад. Вектори $\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ компланарні, так як $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

Тема 2.2 Лінійні простори. Лінійна залежність векторів. Базис і розмір лінійного простору.

Визначення. Дійсним лінійним або векторним простором називається множина $V = \{x, y, z, \dots\}$, в якій визначені операції додавання елементів $x + y = z$ та множення на число $\alpha x = z$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, і для цих операцій виконуються наступні аксіоми:

- I. $x + y = y + x$ (комутативність додавання);
- II. $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$ (асоціативність додавання);
- III. $\forall x \in V \quad \exists 0 \in V: x + 0 = x$ (існування нейтрального елемента відносно додавання);
- IV. $\forall x \in V \quad \exists (-x) \in V: x + (-x) = 0$ (існування протилежного елемента відносно додавання);
- V. $1 \cdot x = x$ (асоціативність множення на скаляр);
- VI. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (унітарність);
- VII. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивність множення на елемент відносно складання скалярів).
- VIII. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивність множення на скаляр відносно складання елементів).

де x, y, z – елементи простору або вектори, позначаються $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Визначення. V – лінійний простір. Множина $V \times V$ всіляких пар $(\vec{x}, \vec{y})$, де $\vec{x}, \vec{y} \in V$ називається **декартовим добутком лінійних просторів**.

У множині $V \times V$ визначені наступні операції:

- 1) $(\vec{x}_1, \vec{y}_1) + (\vec{x}_2, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$;
- 2) $\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha\vec{x}, \alpha\vec{y})$.

Введені таким чином операції задовольняють аксіомам I-VIII, отже, множина $V \times V$ є лінійним простором.

Визначення. Множина V_1 елементів лінійного простору V називається **підпростором простору** V , коли виконуються наступні умови:

- 1) у множенні V_1 операції додавання та множення на число визначаються так само, як і у множині V ;
- 2) якщо $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$, то $\vec{x} + \vec{y} \in V_1$;
- 3) якщо $\vec{x} \in V_1$, то $\alpha\vec{x} \in V_1$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ якщо V – дійсний простір і $\alpha \in \mathbb{C}$ якщо V – комплексний простір;

Визначення. Вектор $\vec{y} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_r\vec{x}_r$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – числа (дійсні, якщо V – дійсний простір і комплексні, якщо V – комплексний простір), що належить простору V (в

цьому випадку говорять, що вектор $\vec{y}$ лінійно виражається через вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$, називається **лінійною комбінацією** векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – **коефіцієнтами цієї комбінації**.

Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$, то комбінація називається **тривіальною** і представляє нульовий вектор, якщо хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля, то комбінація **нетривіальна**.

Визначення. Система векторів називається **лінійно-незалежною**, якщо тільки тривіальна лінійна комбінація цих векторів є нульовим вектором і **лінійно-залежною**, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка є нульовим вектором.

Іншими словами, якщо рівність $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_r \vec{x}_r = \vec{0}$ справедливо лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$, то вектори лінійно-незалежні, якщо існують $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, і має місце дана рівність, то вектори лінійно-залежні.

Система, що складається з одного ненульового вектора, лінійно-незалежна, так як $\alpha \vec{x} = \vec{0}$ при $\vec{x} \neq \vec{0}$ можливо лише при $\alpha = 0$. Система, що складається з одного нульового вектора, лінійно-залежна, так як рівність $\alpha \vec{0} = \vec{0}$ має місце і при $\alpha \neq 0$.

Для векторів лінійного простору мають місце такі **властивості**:

- 1) Якщо до системи r лінійно-залежних векторів приєднати будь-які m векторів, то отримаємо систему $r + m$ лінійно-залежних векторів.
- 2) Якщо з системи r лінійно-незалежних векторів відкинути будь-які m векторів $r + m$, то вектори, що залишилися, утворюють лінійно-незалежну систему.
- 3) Якщо серед векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r \in \vec{x}_k$ і $\vec{x}_l$ ($k \neq l$) такі, що $\vec{x}_k = \lambda \vec{x}_l$, де λ – число, то вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$ лінійно-залежні.
- 4) Якщо серед векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r \in \vec{0}$, то ці вектори лінійно-залежні.

Теорема. Для того щоб вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$ ($r > 1$) були лінійно-залежні, необхідно і достатньо, щоб хоча б один з цих векторів був лінійною комбінацією інших.

Доведення. Необхідність. Нехай вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$ лінійно-залежні, тоді $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ серед яких хоча б одне відмінне від нуля, такі, що $\sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Припустимо, що $\alpha_k \neq 0$, тоді

$$\vec{x}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^r \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_k} \right) \vec{x}_i = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^r \beta_i \vec{x}_i,$$

тобто вектор $\vec{x}_k$ є лінійною комбінацією інших векторів цієї системи.

Достатність. Нехай один з векторів даної системи, наприклад $\vec{x}_k$, є лінійною комбінацією інших векторів, тобто

$$\vec{x}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^r \beta_i \vec{x}_i \quad \text{або} \quad \vec{x}_k - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^r \beta_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

Таким чином, нетривіальна лінійна комбінація векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$ є нульовим вектором і, отже, ці вектори лінійно-залежні. ▲

Визначення. Два вектори лінійного простору називаються *колінеарними*, якщо вони лінійно-залежні, і *неколінеарними*, якщо вони лінійно-незалежні.

Визначення. Три вектори лінійного простору називаються *компланарними*, якщо вони лінійно-залежні, і *некомпланарними*, якщо вони лінійно-незалежні.

РОЗМІРНІСТЬ І БАЗИС ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ

Визначення. Нехай в лінійному просторі V виконуються наступні умови:

- 1) $\exists n$ лінійно-незалежних векторів;
- 2) Будь-яка система $n+1$ векторів лінійно-залежна.

Тоді число n називається *розмірністю простору* V . Позначається $\dim V$. Якщо простір складається з одного нульового елемента, то його розмірність будемо вважати рівною нулю. Простір V розмірності n називається *n -вимірним простором*.

Визначення. *Базисом* n -вимірного простору V називається будь-яка впорядкована система n лінійно-незалежних векторів цього простору.

Теорема 1. Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – базис n -вимірного простору V , то будь-який вектор $\vec{x}$ цього простору лінійно виражається через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, тобто $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$.

Доведення. Нехай $\vec{x}$ – довільний вектор простору V . Так як розглядається n -вимірний простір, то система векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{x}$ лінійно-залежна, тобто існує нетривіальна лінійна комбінація яка дорівнює нулю:

$$\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n + \beta_{n+1} \vec{x} = \vec{0}.$$

Легко показати, що $\beta_{n+1} \neq 0$. Дійсно, якщо $\beta_{n+1} = 0$, то серед коефіцієнтів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ є відмінні від нуля, і вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ лінійно-залежні. Так як $\beta_{n+1} \neq 0$, то з рівності випливає, що $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$, де $\alpha_i = -\frac{\beta_i}{\beta_{n+1}}$ ($i=1, 2, \dots, n$). ▲

Теорема 2. Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – система лінійно-незалежних векторів простору V і будь-який вектор $\vec{x}$ цього простору лінійно виражається через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, то простір V є n -вимірним.

Доведення. Нехай $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ – довільні вектори простору V . Доведемо, що вони лінійно-залежні, тобто що існує нетривіальна лінійна комбінація яка дорівнює нулю:

$$\beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2 + \dots + \beta_n \vec{x}_n + \beta_{n+1} \vec{x}_{n+1} = \vec{0} \quad (2.2.1)$$

Оскільки за умовою теореми

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2 + \dots + x'_n \vec{e}_n$$

або

$$(x_1 - x'_1) \vec{e}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{e}_2 + \dots + (x_n - x'_n) \vec{e}_n = \vec{0}.$$

Так як вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ лінійно-незалежні, то остання рівність має місце тільки за умови

$$(x_1 - x'_1) = 0, (x_2 - x'_2) = 0, \dots, (x_n - x'_n) = 0,$$

отже

$$x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_n = x'_n. \quad \blacktriangle$$

Визначення. Вираз $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$ називається *розкладання вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$* , а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — *координатами вектора* в цьому базисі. Якщо вектор $\vec{x}$ має в деякому базисі координати $x_1, x_2, \dots, x_n$, то будемо писати: $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Приклад. Нехай V — п'ятивимірний лінійний простір з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$. Знайдемо координати векторів $\vec{e}_2$ і $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$ у даному базисі. Вектор $\vec{x}$ представимо у вигляді $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + (-1)\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + 0\vec{e}_5$, отже, $\vec{x}(3, 0, -1, 2, 0)$. Аналогічно, $\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 + 0\vec{e}_5$, звідки $\vec{e}_2(0, 1, 0, 0, 0)$.

Властивості: 1) Вектор є нульовим вектором простору тоді і тільки тоді, коли всі його координати в будь-якому базисі дорівнюють нулю, тобто

$$\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{0}(0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Δ Якщо всі координати вектора в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ дорівнюють нулю, то $\vec{x} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \dots + 0\vec{e}_n = \vec{0}$. Якщо $\vec{x} = \vec{0}$ і в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$, то $x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \vec{0}$. Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ лінійно-незалежні, отже, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. $\blacktriangle$

2) Координати суми двох векторів в деякому базисі дорівнюють сумі відповідних координат цих векторів в цьому ж базисі.

Δ Нехай в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$: $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$ та $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n$.

Тоді $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) + (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n)$,

отже, $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1) \vec{e}_1 + (x_2 + y_2) \vec{e}_2 + \dots + (x_n + y_n) \vec{e}_n$. Отримуємо розкладання вектора $\vec{x} + \vec{y}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Так як розкладання по базису єдине, то координатами вектора $\vec{x} + \vec{y}$ є $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$. $\blacktriangle$

3) Координати добутку вектора $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ рівні добутку відповідних координат даного вектора в тому ж базисі на це число $\alpha \vec{x}(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$.

4) Вектор $\vec{x}$ є лінійною комбінацією векторів $x_1, x_2, \dots, x_r$ тоді і тільки тоді, коли кожна координата вектора $\vec{x}$ в деякому базисі є такою ж лінійною комбінацією відповідних координат векторів $x_1, x_2, \dots, x_r$ в тому ж базисі.

5) Два вектора $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\vec{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їх відповідні координати в одному і тому ж базисі, $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Приклад. Знайдемо координати вектора $2\vec{x} - 3\vec{y}$ в деякому базисі, якщо $\vec{x}(2, -1, 3, 5)$ і $\vec{y}(-1, 4, 0, -2)$, тоді

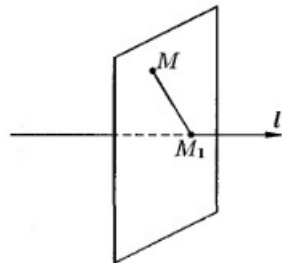
$$2\vec{x} - 3\vec{y} = 2\{2, -1, 3, 5\} - 3\{-1, 4, 0, -2\} = \{4 + 3, -2 - 12, 6 - 0, 10 + 6\} = \{7, -14, 6, 16\},$$

значить, вектор $2\vec{x} - 3\vec{y}$ має координати $(7, -14, 6, 16)$.

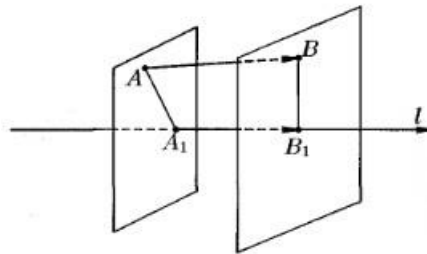
ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Нехай у просторі задана вісь l , тобто спрямована пряма.

Визначення. *Проекцією точки M на вісь l називається основа M_1 перпендикуляра MM_1 опущеного з точки на вісь.* Точка M_1 є точка перетину осі l з площиною, що проходить через точку M перпендикулярно осі (див. мал. 2.3.1). Якщо точка M лежить на осі l , то проекція точки M на вісь збігається з M .



Мал. 2.3.1



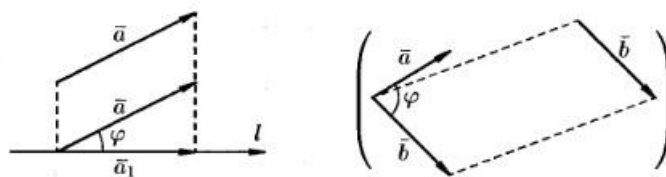
Мал. 2.3.2

Нехай $\overline{AB}$ – довільний вектор ($\overline{AB} \neq \vec{0}$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектора $\overline{AB}$ і розглянемо вектор $\overline{A_1B_1}$.

Визначення. *Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l називається додатне число $|\overline{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l однаково спрямовані і від'ємне число $-|\overline{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь l протилежно спрямовані (див. мал. 2.3.2). Якщо точки A_1 і B_1 збігаються ($\overline{A_1B_1} = 0$), то проекція вектора $\overline{AB}$ дорівнює 0.*

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь l позначається так: $pr_l \overline{AB}$. Якщо $\overline{AB} = 0$ або $\overline{AB} \perp l$, то $pr_l \overline{AB} = 0$.

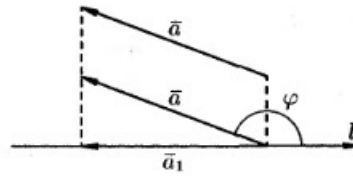
Визначення. *Кут φ між вектором $\vec{a}$ і віссю l (або кут між двома векторами) зображений на малюнку 2.3.3. Очевидно, $0 \leq \varphi \leq \pi$.*



Мал. 2.3.3

Основні властивості проекцій:

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто $np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$.



Мал. 2.3.4

Δ Якщо $\varphi = (\vec{a}, l) < \frac{\pi}{2}$, то $np_l \vec{a} = +|\vec{a}_1| = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$.

Якщо $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ($\varphi \leq \pi$), то $np_l \vec{a} = -|\vec{a}_1| = -|\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$ (див. мал. 2.3.4)

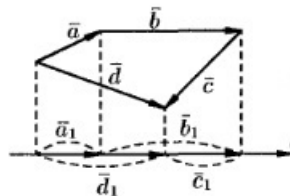
Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $np_l \vec{a} = 0 = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$. ▲

Наслідок 1. Проекція вектора на вісь додатня (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут – прямий.

Наслідок 2. Проекції рівних векторів на одну і ту ж вісь рівні між собою.

2. Проекція суми декількох векторів на одну і ту ж вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь.

Δ Нехай, наприклад, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Маємо $np_l \vec{d} = +|\vec{d}_1| = +|\vec{a}_1| + |\vec{b}_1| + |\vec{c}_1|$, тобто $np_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b} + np_l \vec{c}$ (див. мал. 2.3.5). ▲



Мал. 2.3.5

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція на вісь також множиться на це число, тобто $np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot np_l \vec{a}$.

Δ При $\lambda > 0$: $np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot np_l \vec{a}$

При $\lambda < 0$: $np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot (-\cos \varphi) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot np_l \vec{a}$

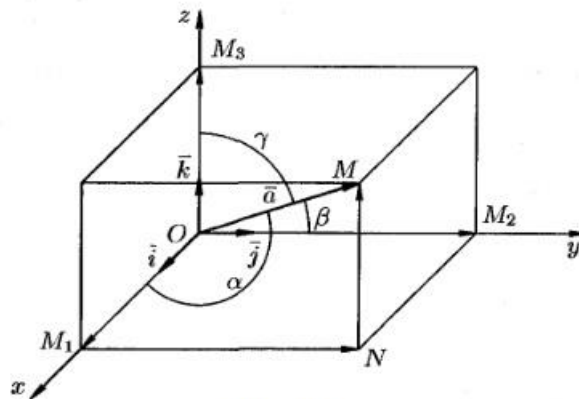
Властивість справедлива, очевидно, і при $\lambda = 0$. ▲

Таким чином, лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

МОДУЛЬ ВЕКТОРА. НАПРАВЛЯЮЧІ КОСИНУСИ

Розглянемо в просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Виділимо на координатних осях Ox , Oy і Oz одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – **орт**. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ простору і поєднаємо його з початком координат: $\vec{a} = \overline{OM}$. Знайдемо проекції

вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Проведемо через кінець вектора $\vec{OM}$ площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з осями позначимо відповідно через точки M_1 , M_2 і M_3 (мал. 2.3.6).



Мал. 2.3.6

Отримаємо прямокутний паралелепіпед однієї з діагоналей якого є вектор $\vec{OM}$, тоді

$$np_x \vec{a} = |\vec{OM_1}|, \quad np_y \vec{a} = |\vec{OM_2}|, \quad np_z \vec{a} = |\vec{OM_3}|$$

За визначенням суми векторів $\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{M_1N} + \vec{NM}$. А так як $\vec{M_1N} = \vec{OM_2}$, $\vec{NM} = \vec{OM_3}$, то $\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}$, але $\vec{OM_1} = |\vec{OM_1}| \cdot \vec{i}$, $\vec{OM_2} = |\vec{OM_2}| \cdot \vec{j}$, $\vec{OM_3} = |\vec{OM_3}| \cdot \vec{k}$.

Позначимо проекції вектора $\vec{a} = \vec{OM}$ на осі Ox , Oy і Oz відповідно через a_x , a_y і a_z , тобто $|\vec{OM_1}| = a_x$, $|\vec{OM_2}| = a_y$, $|\vec{OM_3}| = a_z$, тоді отримуємо:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

Ця формула є основною в векторному численні і називається **розкладання вектора по ортам координатних осей**.

Числа a_x , a_y , a_z називаються **координатами вектора $\vec{a}$** , тобто координати вектора є його проекції на відповідні координатні осі.

Знаючи проекції вектора $\vec{a}$, можна легко знайти вираз для модуля вектора. На підставі теореми про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда

$$|\vec{OM}|^2 = |\vec{OM_1}|^2 + |\vec{OM_2}|^2 + |\vec{OM_3}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

звідси

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

тобто модуль вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його проекцій на осі координат.

Нехай α , β , γ – кути вектора $\vec{a}$ відповідно з осями Ox , Oy і Oz , тоді за властивістю проекцій вектора на вісь:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma$$

або

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

– **напрямлені косинуси вектора** $\vec{a}$. Підставимо вираз напрямлених косинусів у рівність модуля вектора, отримуємо $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 \cos^2 \alpha + |\vec{a}|^2 \cos^2 \beta + |\vec{a}|^2 \cos^2 \gamma$. Скоротивши на $|\vec{a}|^2 \neq 0$, отримуємо співвідношення

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів ненульового вектора дорівнює одиниці.

Зауваження. Координатами одиничного вектора $\vec{e}$ є числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, тобто $\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів, а саме:

1) При додаванні (відніманні) векторів їх одноіменні координати складаються (віднімаються):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

2) При множенні вектора на скаляр координати вектора множаться на цей скаляр:

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \cdot \vec{i} + \lambda a_y \cdot \vec{j} + \lambda a_z \cdot \vec{k} \quad \text{або} \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

Умова колінеарності векторів заданих своїми координатами: Так як $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, де λ – деяке число, тобто

$$a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \lambda(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \lambda b_x \cdot \vec{i} + \lambda b_y \cdot \vec{j} + \lambda b_z \cdot \vec{k}$$

Звідси, $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$, тобто $\frac{a_x}{b_x} = \lambda$, $\frac{a_y}{b_y} = \lambda$, $\frac{a_z}{b_z} = \lambda$ або $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

тобто, **проекції колінеарних векторів пропорційні.**

[Тема 2.4 Скалярний добуток векторів. Евклідов простір. Довжина вектора. Нерівність Коші-Буняковського. Кут між векторами. Ортогональність векторів.](#)

Визначення. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто

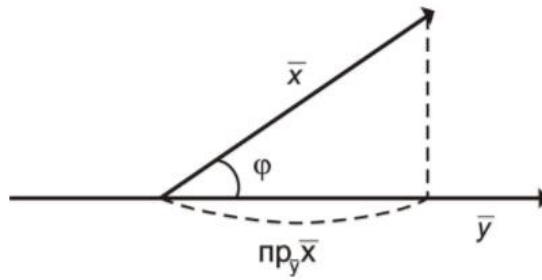
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \varphi,$$

де $\varphi = (\vec{x}, \vec{y})$. Позначається $\vec{x}\vec{y}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ або $(\vec{x}, \vec{y})$.

Так як $|\vec{x}| \cos \varphi = np_{\vec{y}} \vec{x}$ (див. мал. 2.4.1), а $|\vec{y}| \cos \varphi = np_{\vec{x}} \vec{y}$, то отримуємо

$$\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}| \cdot np_{\vec{x}} \vec{y} = |\vec{y}| \cdot np_{\vec{y}} \vec{x}$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію іншого на вісь, однаково напрямлену з першим вектором.



Мал. 2.4.1

Властивості скалярного добутку:

1) Скалярний добуток має комутативну властивість: $\vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{x}$.

Δ $\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y})$, а $\vec{y}\vec{x} = |\vec{y}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\vec{y}, \vec{x})$. Так як $|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = |\vec{y}| \cdot |\vec{x}|$, як добуток чисел і $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \cos(\vec{y}, \vec{x})$, то $\vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{x}$. $\blacktriangle$

2) Скалярний добуток має асоціативну властивість щодо скалярного множника: $(\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x}\vec{y})$.

Δ $(\lambda\vec{x})\vec{y} = |\vec{y}| \cdot \text{pr}_{\vec{y}} \lambda\vec{x} = \lambda |\vec{y}| \cdot \text{pr}_{\vec{y}} \vec{x} = \lambda(\vec{x}\vec{y})$ $\blacktriangle$

3) Скалярний добуток має розподільну властивість (дистрибутивність): $\vec{x}(\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x}\vec{y} + \vec{x}\vec{z}$.

Δ $\vec{x}(\vec{y} + \vec{z}) = |\vec{x}| \cdot \text{pr}_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = |\vec{x}| \cdot (\text{pr}_{\vec{x}} \vec{y} + \text{pr}_{\vec{x}} \vec{z}) = |\vec{x}| \cdot \text{pr}_{\vec{x}} \vec{y} + |\vec{x}| \cdot \text{pr}_{\vec{x}} \vec{z} = \vec{x}\vec{y} + \vec{x}\vec{z}$ $\blacktriangle$

4) Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини: $\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2$

Δ $\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}| \cdot |\vec{x}| \cos 0 = |\vec{x}| \cdot |\vec{x}| = |\vec{x}|^2$. $\blacktriangle$ Зокрема: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

Зауваження. Якщо вектор $\vec{x}$ піднести скалярно в квадрат і потім добути корінь, то отримаємо не даний вектор, а його модуль $|\vec{x}|$, тобто $\sqrt{\vec{x}^2} = |\vec{x}|$ ($\sqrt{\vec{x}^2} \neq \vec{x}$).

5) Якщо вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ (ненульові) взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\vec{x} \perp \vec{y}$, $\vec{x}\vec{y} = 0$. Справедливо і обернене твердження: якщо $\vec{x}\vec{y} = 0$ і $\vec{x} \neq 0 \neq \vec{y}$, то $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Δ Так як $\varphi = (\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$, то $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Отже, $\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot 0 = 0$. Якщо ж $\vec{x}\vec{y} = 0$ та $|\vec{x}| \neq 0$, $|\vec{y}| \neq 0$, то $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Звідси, $\varphi = (\vec{x}, \vec{y}) = 90^\circ$, тобто $\vec{x} \perp \vec{y}$. $\blacktriangle$

Зокрема, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

Приклад. Знайдемо довжину вектора $\vec{z} = 3\vec{x} - 4\vec{y}$, якщо $|\vec{x}| = 2$, $|\vec{y}| = 3$, $(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{3}$, отримуємо

$$|\vec{z}| = \sqrt{\vec{z}^2} = \sqrt{(3\vec{x} - 4\vec{y})^2} = \sqrt{9\vec{x}^2 - 24\vec{x}\vec{y} + 16\vec{y}^2} = \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

ВИРАЗ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ

Нехай задані два вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ та $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Знайдемо скалярний добуток векторів, перемножуючи їх як многочлени:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z.$$

тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Отже, *скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їх одноіменних координат.*

Визначення. *Евклідовим простором* називається лінійний дійсний простір, в якому задана операція скалярного множення векторів.

Якщо n -вимірний лінійний простір – евклідів, то будемо називати його *евклідовим n -вимірним простором*, а базис лінійного простору – *базисом евклідового простору*.

ДОВЖИНА ВЕКТОРА

Визначення. *Довжиною* або *модулем* вектора $\vec{x}$ евклідового простору називається арифметичне значення квадратного кореня з скалярного квадрата вектора $\vec{x}$. Довжину вектора $\vec{x}$ будемо позначати $|\vec{x}|$. Таким чином, $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}$.

Мають місце наступні **властивості**:

- 1) $|\vec{x}| = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\vec{x} = \vec{0}$;
- 2) $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3) $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$ (Нерівність Коші-Буняковського);
- 4) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (Нерівність трикутника).

Доведення. 3) нерівність Коші-Буняковського:

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то властивість очевидна. Нехай $\vec{x}$ і $\vec{y}$ – довільні ненульові вектори евклідового простору, а λ – будь-яке дійсне число. Згідно властивостям скалярного добутку, маємо $(\lambda \vec{x} - \vec{y})^2 \geq 0$ або $\lambda^2 \vec{x}^2 - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \vec{y}^2 \geq 0$.

Так як λ – будь-яке дійсне число, а ліва частина останньої нерівності є квадратний тричлен щодо λ , то ця нерівність справедлива тільки тоді, коли дискримінант тричлена недодатний, тобто $(\vec{x}, \vec{y})^2 - \vec{x}^2 \vec{y}^2 \leq 0$ або $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq \vec{x}^2 \vec{y}^2$. Так як обидві частини нерівності невід'ємні, то $\sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{\vec{x}^2 \vec{y}^2}$ або $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$. ▲

Зауваження. У співвідношенні $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$ рівність досягається тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ колінеарні.

Доведення. Дійсно, нехай вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ колінеарні. Тоді $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ і тому $|(\vec{x}, \vec{y})| = |(\vec{x}, \lambda \vec{x})| = |\lambda| |(\vec{x}, \vec{x})| = |\lambda| |\vec{x}|^2$, $|\vec{x}| |\vec{y}| = |\vec{x}| |\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|^2$. Отже, $|(\vec{x}, \vec{y})| = |\vec{x}| |\vec{y}|$. Нехай це рівність має місце. Припустимо, що $\vec{x}$ і $\vec{y}$ неколінеарні. Тоді $\lambda \vec{x} - \vec{y} \neq \vec{0}$ при будь-якому λ . При цьому в співвідношенні $(\lambda \vec{x} - \vec{y})^2 \geq 0$, отже, $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$, що суперечить умові $|(\vec{x}, \vec{y})| = |\vec{x}| |\vec{y}|$. Отже, $\vec{x}$ і $\vec{y}$ колінеарні.

Доведення. 4) нерівність трикутника: Розглянемо

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) \text{ та } (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2|\vec{x}| |\vec{y}|$$

З нерівності Коші-Буняковського маємо $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$. Отже, $|\vec{x} + \vec{y}|^2 \leq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$ або $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$. ▲

КУТ МІЖ ВЕКТОРАМИ

З нерівності Коші-Буняковського випливає, що для ненульових векторів $\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}| |\vec{y}|} \leq 1$ або

$-1 \leq \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|} \leq 1$. Число $\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$ можна розглядати як косинус деякого кута φ .

Визначення. Кут φ , для якого $\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ назовемо **кутом між векторами** $\vec{x}$ і $\vec{y}$.

Визначення. Два вектора називаються **ортогональними**, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. Нульовий вектор ортогональний будь-якому іншому вектору.

З визначення випливає, що для того щоб ненульові вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ були ортогональними, необхідно і достатньо, щоб $\cos \varphi = 0$, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$ або $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Для того щоб ненульові вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ були колінеарні, тобто $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, необхідно і достатньо, щоб $\cos \varphi = \pm 1$, тобто $\varphi = 0$ (при $\lambda > 0$) або $\varphi = \pi$ (при $\lambda < 0$).

Дійсно, якщо в співвідношенні $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$ має місце рівність, то $\cos \varphi = \pm 1$, звідки $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$. Але, як зазначалося раніше, в цьому співвідношенні рівність досягається тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні.

ОРТОНОРМОВАНІЙ БАЗИС

Визначення. Система векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ($n \geq 2$) називається **ортогональною**, якщо ці вектори попарно ортогональні, тобто $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ при $i \neq j$.

Теорема 1. Ортогональна система ненульових векторів лінійно-незалежна.

Доведення. Нехай $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ – ортогональна система ненульових векторів. Припустимо, що вона лінійно-залежна. Тоді існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, такі що $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$. Нехай $\alpha_i \neq 0$. Тоді скалярний добуток $(\vec{x}_i, \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_i \vec{x}_i + \dots + \alpha_n \vec{x}_n) = 0$ або $(\vec{x}_i, \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_i \vec{x}_i + \dots + \alpha_n \vec{x}_n) = 0$. Так як $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ при $i \neq j$, то $\alpha_i |\vec{x}_i|^2 = 0$, тоді $|\vec{x}_i| = 0$, тобто $\vec{x}_i$ – нульовий вектор, що суперечить умові теореми. ▲

Визначення. Вектор $\vec{x}$ називається **нормованим** або **одиничним**, якщо $|\vec{x}| = 1$.

Якщо $\vec{x}$ – ненульовий вектор, то $\vec{x}^0 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, $\vec{x}_1^0 = \frac{\vec{x}}{-|\vec{x}|}$ є нормований вектор, а знаходження за цими формулами нормованого вектора називається **нормуванням вектора**. Множник $\mu = \frac{1}{\pm |\vec{x}|}$ називається **нормуючим множником**.

Визначення. *Ортонормованою системою векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ($n \geq 2$) називається ортогональна система, кожен вектор якої є нормованим, тобто якщо*

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \text{ де } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, що якщо $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ – ортогональна система ненульових векторів, то система отримана з даної нормуванням кожного вектора, також є ортогональною.

Визначення. *Ортонормованим базисом* евклидова n -вимірного простору називається базис вектори якого складають ортонормовану систему.

Теорема 2. У всякому Евклідовому n -вимірному просторі ($n \geq 2$) існує ортонормований базис.

Визначення. Процес побудови за даним базисом ортонормованного базису називається *ортogonalізацією даного базису*.

Тема 2.5 Перетворення координат. Матриця переходу. Ортогональні перетворення. Орієнтація базисів, орієнтація простору.

МАТРИЦЯ ПЕРЕХОДУ ВІД ОДНОГО БАЗИСУ ДО ІНШОГО

Розглянемо в лінійному просторі V два базиси: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ і $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$.

Визначення. Матрицею переходу від одного базису до іншого називається матриця системи векторів $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$, в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

З визначення випливає, що якщо

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

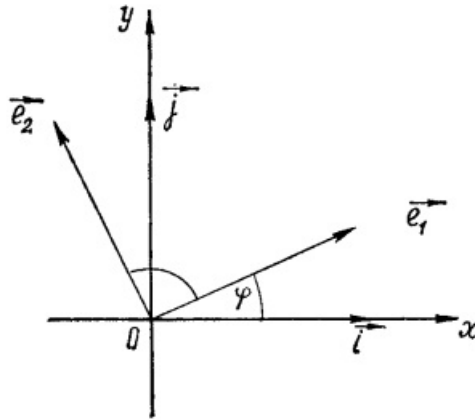
є матриця переходу від одного даного базису до іншого, то

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}'_1 = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + ... + t_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{e}'_2 = t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + ... + t_{n2}\vec{e}_n \\ \\ \vec{e}'_n = t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + ... + t_{nn}\vec{e}_n \end{array} \right. \quad (2.5.1)$$

Матриця переходу від одного базису до іншого є невиврождена і всяку невиврождену матрицю порядку n можна розглядати як матрицю переходу від одного базису до іншого в n -вимірному просторі.

Очевидно, що матриця T^{-1} обернена до матриці T , є матрицею переходу від базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Приклад. Розглянемо в лінійному просторі M_1 (множину векторів, що лежать на площині) базиси $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (мал. 2.5.1). В цьому випадку $\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi \\ \vec{e}_2 = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi \end{cases}$, матрицею переходу від базису $\vec{i}, \vec{j}$ до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ є матриця $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.



Мал. 2.5.1

ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ ВЕКТОРА

Задача перетворення координат полягає в знаходженні залежності між координатами вектора в різних базисах. При цьому передбачається, що зв'язок між базисами відомий.

Визначення. Формули, що зв'язують координати вектора в різних базисах, називаються *формулами перетворення координат*.

Теорема. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, а $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ – координати цього ж вектора в базисі $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$, то має місце наступне співвідношення:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad X = TX', \quad \text{де} \quad X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

T – матриця переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$.

Доведення. З умови теореми випливає, що $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$,
 $\vec{x} = \alpha'_1 \vec{e}'_1 + \alpha'_2 \vec{e}'_2 + \dots + \alpha'_n \vec{e}'_n$

Якщо матриця, $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$, то з огляду на співвідношення (2.5.1) отримаємо

$$x = \alpha'_1 (t_{11} \vec{e}_1 + t_{21} \vec{e}_2 + \dots + t_{n1} \vec{e}_n) + \alpha'_2 (t_{12} \vec{e}_1 + t_{22} \vec{e}_2 + \dots + t_{n2} \vec{e}_n) + \dots + \alpha'_n (t_{1n} \vec{e}_1 + t_{2n} \vec{e}_2 + \dots + t_{nn} \vec{e}_n) =$$

Порівнюючи цей результат з рівністю $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$, маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = t_{11}\alpha_{1'} + t_{12}\alpha_{2'} + \dots + t_{1n}\alpha_{n'} \\ \alpha_1 = t_{21}\alpha_{1'} + t_{22}\alpha_{2'} + \dots + t_{2n}\alpha_{n'} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n = t_{n1}\alpha_{1'} + t_{n2}\alpha_{2'} + \dots + t_{nn}\alpha_{n'} \end{array} \right. \text{ або в матричній формі } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha_{1'} \\ \alpha_{2'} \\ \vdots \\ \alpha_{n'} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} \alpha_{1'} \\ \alpha_{2'} \\ \vdots \\ \alpha_{n'} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Отримані формули є *формулами перетворення координат*. ▲

ОРТОГОНАЛЬНІ МАТРИЦІ

Визначення. Дійсна квадратна матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається

ортogonalною, якщо відповідна їй система векторів $\vec{x}_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \dots, \vec{x}_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$ ортонормована.

При цьому передбачається, що вектори $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, є елементами евклідового простору, в якому скалярний добуток визначається таким чином: $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$. З визначення

впливає, що якщо A – ортогональна матриця, то $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ для будь-яких фіксованих i і j ($i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$). Очевидно, що одинична матриця будь-якого порядку є ортогональною.

Теорема 1. *Необхідною і достатньою умовою ортогональності матриці A є умова $A^T A = E$, A^T – матриця, транспонована до матриці $A = (a_{ij})$, E – одинична матриця того ж порядку, що і A .*

Наслідок 1) Визначник ортогональної матриці за абсолютною величиною дорівнює одиниці.

2) Ортогональна матриця є невироджена.

3) Добуток двох ортогональних матриць є ортогональна матриця.

4) Необхідною і достатньою умовою ортогональності матриці A є умова $A^T = A^{-1}$.

5) Якщо матриця A ортогональна, то A^T також ортогональна.

6) Якщо матриця A ортогональна, то A^{-1} також ортогональна.

Зауваження. Необхідною і достатньою умовою ортогональності матриці A є також умова $AA^T = E$.

Теорема 2. Матриця переходу від одного ортонормованого базису до іншого є ортогональною.

ОРТОГОНАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Визначення. Перетворення лінійне, якщо для будь-яких векторів простору і довільного числа λ (дійсного, якщо простір дійсний, і комплексного, якщо – комплексний), задовольняються наступні умови:

- 1) $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$;
- 2) $f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

Визначення. Лінійне перетворення евклідового простору називається **ортогональним**, якщо в деякому ортонормованому базисі його матриця ортогональна.

Теорема 1. Для того щоб лінійне перетворення евклідового простору було ортогональним, необхідно і достатньо, щоб воно ортонормований базис переводило в ортонормований.

Доведення. Необхідність. Нехай f – ортогональне перетворення евклідового простору, що

має в деякому ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Тоді координати вектора $\vec{e}'_i = f(\vec{e}_i)$ ($i=1,2,\dots,n$) розташовані в i -му стовпці матриці A . Так як матриця A ортогональна, то $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Отже, вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ утворюють ортонормований базис.

Достатність. Нехай перетворення f переводить ортонормований базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$. Тоді матриця A перетворення f в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ є матрицею переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$. Отже, матриця A ортогональна і перетворення f є ортогональним. ▲

Теорема 2. Ортогональне перетворення не змінює скалярного добутку векторів.

Доведення. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормований базис евклідового простору, і $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$, $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n$ – два довільних вектори цього простору. Тоді $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Якщо f – ортогональне перетворення, то

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n), \quad f(\vec{y}) = y_1 f(\vec{e}_1) + y_2 f(\vec{e}_2) + \dots + y_n f(\vec{e}_n),$$

де $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$ – ортонормований базис. Отже, $(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, тобто $(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$. ▲

Наслідок 1. Ортогональне перетворення f не змінює довжини вектора, тобто $|\vec{x}| = |f(\vec{x})|$.

Наслідок 2. Ортогональне перетворення не змінює кута між векторами.

Ортогональні перетворення мають наступні властивості:

- 1) Ортогональне перетворення – невироджене.

- 2) Для ортогонального перетворення існує зворотне перетворення, яке також є ортогональним.
- 3) Якщо A – матриця ортогонального перетворення, то A^T – матриця перетворення, зворотного даному.
- 4) Добуток ортогональних перетворень також є ортогональним.

Ці властивості впливають з властивостей ортогональних матриць.

Тема 2.6 Векторний та мішаний добуток векторів. Полярна, циліндрична і сферична системи координат. Формули переходу.

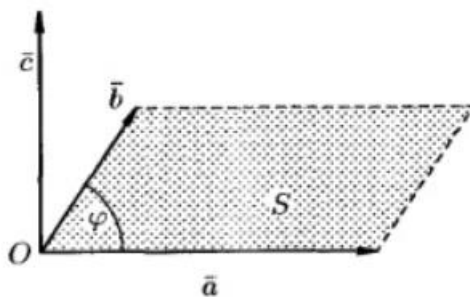
Три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взяті в зазначеному порядку, утворюють *праву трійку*, якщо з кінця третього вектору $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектору $\vec{a}$ до другого вектору $\vec{b}$ виконан проти годинникової стрілки, і *ліву*, якщо за годинниковою стрілкою (мал. 2.6.1)



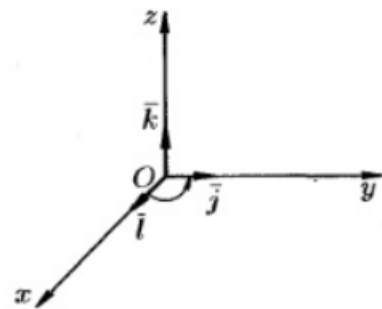
Мал. 2.6.1

Визначення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який:

- 1) перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) має довжину, чисельно рівну площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах (див. мал. 2.6.2), тобто $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.



Мал. 2.6.2



Мал. 2.6.3

- 3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку. Векторний добуток позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

З визначення векторного добутку безпосередньо впливають такі співвідношення між ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ (див. мал. 2.6.3): $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Доведемо, наприклад, що $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$:

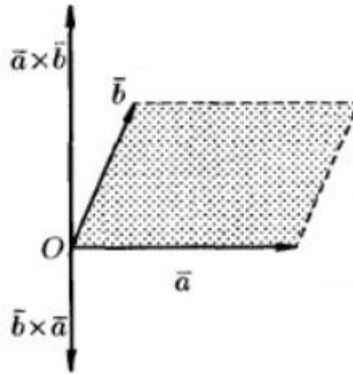
- 1) $\vec{k} \perp \vec{i}$, $\vec{k} \perp \vec{j}$;

- 2) $|\vec{k}|=1$, але $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$;
 3) вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворюють праву трійку (див. мал. 2.6.1).

Властивості векторного добутку:

1) При перестановці співмножників векторний добуток змінює знак, тобто $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (див. мал. 2.6.4).

Δ Вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ колінеарні, мають однакові модулі (площа паралелограма залишається незмінною), але протилежно напрямлені (трійки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}$ протилежної орієнтації). Отже, $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. ▲



Мал. 2.6.4

2) Векторний добуток має сполучну властивість щодо скалярного множника, тобто $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.

Δ Нехай $\lambda > 0$. Вектор $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Вектор $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ також перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вектори $\vec{a}$, $\lambda\vec{a}$ лежать в одній площині). Значить, вектори $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ і $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ колінеарні. Очевидно, що і напрямки їх збігаються. Мають однакову довжину:

$$|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda |\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{та} \\
|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Тому $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$. Аналогічно доводиться при $\lambda < 0$. ▲

3) Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Δ Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то кут між ними дорівнює 0° або 180° . Але тоді $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Значить, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Якщо ж $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 0$. Але тоді $\varphi = 0^\circ$ або $\varphi = 180^\circ$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Зокрема, $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$. ▲

4) Векторний добуток має розподільну властивість: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Вираз векторного добутку через координати

Нехай задані два вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Знайдемо векторний добуток цих векторів, перемножуючи їх як многочлени (згідно властивостей векторного добутку):

$$\begin{aligned}
\bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\
&= a_x b_x (\bar{i} \times \bar{i}) + a_x b_y (\bar{i} \times \bar{j}) + a_x b_z (\bar{i} \times \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j} \times \bar{i}) + a_y b_y (\bar{j} \times \bar{j}) + \\
&\quad + a_y b_z (\bar{j} \times \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k} \times \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k} \times \bar{j}) + a_z b_z (\bar{k} \times \bar{k}) = \\
&= \bar{0} + a_x b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + \bar{0} + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} + \bar{0} = \\
&= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \\
&= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Отриману формулу можна записати коротше: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

Встановлення колінеарності векторів:

$$\text{Якщо } \bar{a} \parallel \bar{b} \text{ (і навпаки } \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \text{), тобто } \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

ПОДВІЙНИЙ ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК

Визначення. Вектор $[\bar{a}(\bar{b}, \bar{c})]$ або $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ називається *подвійним векторним добутком*, для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, якщо справедлива формула:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} < \bar{a}, \bar{c} > - \bar{c} < \bar{a}, \bar{b} >.$$

Δ Дійсно, виберемо у просторі спеціальну декартову систему координат: вісь z направимо уздовж вектора $\bar{c}$, а вісь y візьмемо в площині векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$, тоді $\bar{a} = \{x, y, z\}$, $\bar{b} = \{0, y', z'\}$, $\bar{c} = \{0, 0, z''\}$. А значить,

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & y' & z' \\ 0 & 0 & z'' \end{vmatrix} = \{y'z''; 0; 0\} \text{ та } \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ y'z'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{0; zy'z''; -yy'z''\}$$

З іншого боку, оскільки $< \bar{a}, \bar{c} > = zz''$, $< \bar{a}, \bar{b} > = yy' + zz'$, тоді $\bar{b} < \bar{a}, \bar{c} > = \{0; y'zz''; z'zz''\}$, $\bar{c} < \bar{a}, \bar{b} > = \{0; 0; yy'z'' + zz'z''\}$.

Отже, $\bar{b} < \bar{a}, \bar{c} > - \bar{c} < \bar{a}, \bar{b} > = \{0; y'zz''; -yy'z''\}$. ▲

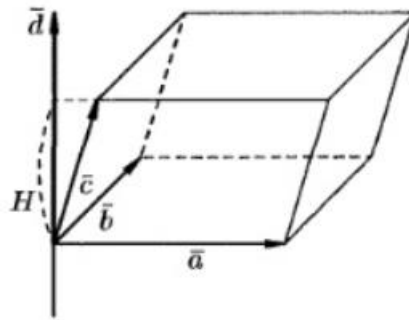
Зауваження. 1. $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} \neq \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$

2. $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} + (\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} + (\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{0}$ – *тотожність Якобі*.

МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Визначення. Розглянемо добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, складений таким чином $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Тут перші два вектори перемножуються векторно, а їх результат скалярно на третій вектор. Такий добуток називається *векторно-скалярним*, або *мішаним добутком* трьох векторів. Мішаний добуток представляє собою деяке число.

З'ясуємо геометричний зміст виразу $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ (див. мал. 2.6.5).



Мал. 2.6.5

Маємо: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot np_{\vec{d}} \vec{c}$, $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $np_{\vec{d}} \vec{c} = H$ для правої трійки векторів і $np_{\vec{d}} \vec{c} = -H$ для лівої, де H – висота паралелепіпеда. Отримуємо: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H)$, тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ де V – об'єм паралелепіпеда, утвореного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком «плюс», якщо ці вектори утворюють праву трійку, і зі знаком «мінус», якщо вони утворюють ліву трійку.

Властивості мішаного добутку:

1) Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці його співмножників, тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Δ Дійсно, в цьому випадку не змінюється ні об'єм паралелепіпеда, ні орієнтація його ребер. ▲

2) Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного і скалярного множення, тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Δ Дійсно, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ і $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \pm V$. Знак у правій частині цих рівностей беремо один і той же, так як трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ однієї орієнтації. Отже, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Це дозволяє записувати мішаний добуток векторів $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ у вигляді $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ без знаків векторного та скалярного множення. ▲

3) Мішаний добуток змінює свій знак при зміні місць будь-яких двох векторів-співмножників, тобто $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}$, $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$, $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}$.

Δ Дійсно, така перестановка рівносильна перестановці співмножників у векторному добутку, яка змінює у добутку знак. ▲

4) Мішаний добуток ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Δ Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – компланарні. Припустимо, що це не так. Можна було б побудувати паралелепіпед з об'ємом $V \neq 0$. Але так як $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm V$, то отримали б, що $\vec{a} \vec{b} \vec{c} \neq 0$. Це суперечить умові: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$

Зворотно, нехай вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні. Тоді вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ буде перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, отже, $\bar{d} \perp \bar{c}$. Тому $\bar{d} \cdot \bar{c} = 0$, тобто $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$. ▲

Вираз мішаного добутку через координати

Нехай задані вектори $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$, $\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$. Знайдемо їх мішаний добуток, використовуючи вирази в координатах для векторного і скалярного добутків:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \right) \cdot (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k})$$

$$(c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z$$

Отриману формулу можна записати коротше: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

Отже, мішаний добуток векторів дорівнює визначнику третього порядку, який складено з координат перемножуваних векторів.

Визначення взаємної орієнтації векторів у просторі

Визначення взаємної орієнтації векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ засноване на таких міркуваннях. Якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – права трійка; якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – ліва трійка.

Встановлення компланарності векторів

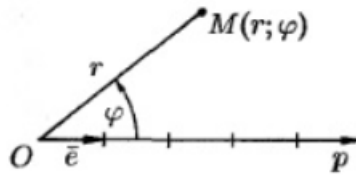
Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю ($\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0, \bar{c} \neq 0$):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{вектори } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ – компланарні.}$$

ПОЛЯРНА, ЦИЛІНДРИЧНА ТА СФЕРИЧНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ. ФОРМУЛИ ПЕРЕХОДУ

Полярна система координат задається точкою O , яка називається **полюсом**, променем Op – **полярною віссю**, і одиничним вектором $\vec{e}$ того ж напрямку, що і промінь Op .

Візьмемо на площині точку M , що не збігається з O . Положення точки M визначається двома числами: її відстанню r від полюса O і кутом φ , утвореним відрізком OM з полярною віссю (відлік кутів ведеться в напрямку, протилежному руху годинникової стрілки) (див. мал. 2.6.6).

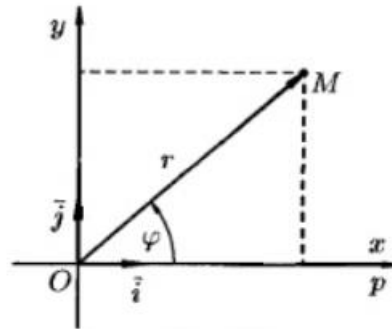


Мал. 2.6.6

Визначення. Числа r і φ називаються **полярними координатами** точки M , пишуть $M(r; \varphi)$, при цьому r називають **полярним радіусом**, φ – **полярним кутом**.

Для отримання всіх точок площини досить полярний кут φ обмежити проміжком $(-\pi, \pi]$ (або $0 \leq \varphi < 2\pi$), а полярний радіус – $[0, \infty)$. У цьому випадку кожній точці площини (крім O) відповідає єдина пара чисел r і φ , і назад.

Встановимо зв'язок між прямокутними і полярними координатами. Для цього поєднаємо полюс O з початком координат системи Oxy , а полярну вісь – з додатньою полувіссю Ox . Нехай x і y – прямокутні координати точки M , а r і φ – її полярні координати.



Мал. 2.6.7

З малюнка 2.6.7 видно, що прямокутні координати точки M виражаються через полярні координати точки наступним чином:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}.$$

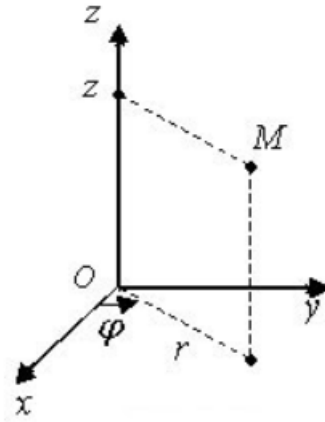
Полярні ж координати точки M виражаються через її декартові координати (той же малюнок) такими формулами:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Визначаючи величину φ , слід встановити (по знакам x і y) чверть, в якій лежить шуканий кут, і враховувати, що $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Визначення. **Циліндричною системою координат** називають тривимірну систему координат, яка є розширенням полярної системи координат шляхом додавання третьої координати (зазвичай позначається z), яка задає висоту точки над площиною.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < h < +\infty. \\ z = h \end{cases}$$



Мал. 2.6.8

Знайдемо формули переходу від декартових координат до циліндричних, для цього отримаємо ρ , φ , h через x , y , z .

Очевидно, що $h = z$. Знайдемо ρ , для цього піднесемо до квадрату перше і друге рівняння та складемо їх:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2,$$

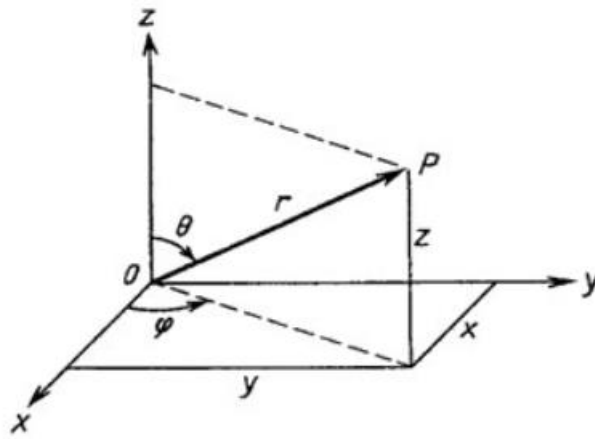
отже, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для того щоб знайти φ отримаємо ρ з рівнянь, отже $\rho = \frac{x}{\cos \varphi}$ та

$$\rho = \frac{y}{\sin \varphi}, \text{ тоді } \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi} \Rightarrow x \sin \varphi = y \cos \varphi \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{y}{x}, \text{ значить,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \\ h = z \end{cases}$$

Розташування точки P в **сферичній системі координат** задається трійкою чисел r , φ і θ , де r – відстань від початку координат до точки P (мал. 2.6.9); φ – кут, утворений проекцією радіус-вектора r на площину Oxy з додатнім напрямком осі Ox ; θ – кут між додатнім напрямом осі Oz і радіус-вектором точки P :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



Мал. 2.6.9

Знайдемо зворотні формули переходу, для цього піднесемо до квадрату всі три рівняння системи і складемо їх, отримуємо:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2, \end{aligned}$$

отже, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Значить,

$$z = r \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Знайдемо φ , для цього отримаємо ρ з перших двох рівнянь:

$$\frac{x}{\sin \theta \cos \varphi} = \frac{y}{\sin \theta \sin \varphi} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin \theta \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{тоді} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Сферичні координати мають вигляд:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

Якщо задані сферичні координати точки, то перехід до циліндричних здійснюється за

формулами: $\begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$. Назад від циліндричних до сферичних: $\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{z} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$.

Тема 2.7 Власні числа та власні вектори матриць. Методи їх знаходження.

Визначення. Вектор $\vec{x}$ лінійного простору називається **власним вектором** лінійного перетворення f цього простору, якщо цей вектор ненульовий і існує число k таке, що $f(\vec{x}) = k\vec{x}$, причому $k \in \mathbb{R}$, якщо лінійний простір є дійсним, і $k \in \mathbb{C}$ якщо простір комплексний. Число k називається **власним числом** вектора щодо перетворення f .

Рівність $f(\vec{x}) = k\vec{x}$ можна записати у матричному вигляді: $AX = kX$, де A – матриця перетворення f в деякому базисі; X – матриця-стовпчик з координат вектора $\vec{x}$ в тому ж базисі. Ненульова матриця-стовпчик X , що задовольняє умові $AX = kX$, називається **власним вектор-стовпчиком матриці A з власним числом k** .

Мають місце такі **властивості**:

1) *Власний вектор лінійного перетворення має єдине власне число.*

Δ Нехай k_1 і k_2 власні числа власного вектора $\vec{x}$ щодо перетворення f . Тоді $f(\vec{x}) = k_1\vec{x}$, $f(\vec{x}) = k_2\vec{x}$, звідки $k_1\vec{x} = k_2\vec{x}$ або $(k_1 - k_2)\vec{x} = \vec{0}$. Так як $\vec{x}$ – ненульовий вектор, то $k_1 = k_2$. ▲

2) *Якщо $\vec{x}$ – власний вектор лінійного перетворення f з власним числом k і λ – будь-яке відмінне від нуля число, то $\lambda\vec{x}$ – також власний вектор f перетворення з власним числом k .*

Δ Якщо $\vec{x}$ – власний вектор з власним числом k , то $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda(k\vec{x}) = k(\lambda\vec{x})$. Таким чином, ненульовий вектор $\lambda\vec{x}$ задовольняє умові $f(\vec{x}) = k\vec{x}$ і, отже, є власним вектором перетворення f з власним числом k . ▲

3) *Якщо $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ – лінійно-незалежні власні вектори лінійного перетворення f з одним і тим же власним числом k , то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – також власний вектор цього перетворення з власним числом k .*

Δ Якщо $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ – лінійно-незалежні власні вектори, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – ненульовий вектор $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = k\vec{x}_1 + k\vec{x}_2 = k(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$, тобто $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = k(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$. ▲

Наслідок. Якщо $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$ – лінійно-незалежні вектори лінійного перетворення f з одним і тим же власним числом k , то будь-яка нетривіальна лінійна комбінація цих векторів є власним вектором цього перетворення з власним числом k .

4) *Якщо $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ – власні вектори лінійного перетворення f відповідно до власних чисел k_1 і k_2 , причому $k_1 \neq k_2$, то $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ – лінійно-незалежні вектори.*

Δ Припустимо, що вектори $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ – лінійно-залежні. Отже, існує нетривіальна лінійна комбінація $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2$ така, що $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \vec{0}$. Без обмеження спільності, можна вважати, що $\alpha_1 \neq 0$. Тоді $\vec{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{x}_2 = c\vec{x}_2$, де $c \neq 0$, так як $\vec{x}_1$ – ненульовий вектор. Відповідно до властивості 2, вектор $c\vec{x}_2$ є власним вектором перетворення f з власним числом k_2 . З огляду на властивість 1, з рівності $\vec{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{x}_2 = c\vec{x}_2$ отримуємо, що $k_1 = k_2$, а це суперечить умові теореми. ▲

Зауваження. Власні вектори перетворення з попарно різними власними числами лінійно-незалежні. Протилежне твердження не є справедливим, так як існують лінійно-незалежні власні вектори з однаковими власними числами.

Визначення. *Характеристичним многочленом матриці A або перетворення f ,* називається $\det(A - \lambda E)$ – многочлен ступеня n щодо довільного числа λ , де E – одинична матриця.

Визначення. *Характеристичним рівнянням лінійного перетворення f ,* називається рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$, де A – матриця цього перетворення в деякому базисі. Рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ називається також *характеристичним рівнянням матриці A* , а його корені – *характеристичними числами лінійного перетворення*, а також *матриці A* .

Матриця лінійного перетворення змінюється при переході від одного базису до іншого, а характеристичний многочлен, не залежить від вибору базису.

Нехай лінійне перетворення f має в деякому базисі матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

тоді характеристичне рівняння цього перетворення має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 1. *Для того щоб лінійне перетворення комплексного лінійного простору мало власний вектор з власним числом k , необхідно і достатньо, щоб k було коренем характеристичного рівняння цього перетворення.*

Доведення. Для того щоб лінійне перетворення f комплексного лінійного простору мало власний вектор з власним числом k , необхідно і достатньо, щоб для деякого вектора $\vec{x} \neq \vec{0}$ мало місце співвідношення $A\vec{x} = k\vec{x}$ або $(A - kE)\vec{x} = \vec{0}$, де A – матриця перетворення f в деякому базисі; E – одинична матриця; X – матриця-стовпець з координат вектора $\vec{x}$ в тому ж базисі. Рівняння $(A - kE)\vec{x} = \vec{0}$ являє матричний запис однорідної системи лінійних рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих. Для того щоб ця система мала нетривіальне рішення, необхідно і достатньо, щоб $\det(A - kE) = 0$, тобто щоб k було коренем характеристичного рівняння. ▲

Зауваження. Власними числами лінійного перетворення дійсного простору є тільки дійсні корені характеристичного рівняння.

Власні числа лінійного перетворення називаються також *власними числами матриці* цього перетворення. Власне число називається *m -кратним*, якщо воно є m -кратним коренем характеристичного рівняння. Зокрема, власне число називається *простим*, якщо воно є простим коренем характеристичного рівняння.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця лінійного перетворення f , а k – власне число

цього перетворення. Тоді координати власного вектора перетворення f з власним числом k можна знайти з системи $(A - kE)X = 0$, яка може бути записана у вигляді

[illegible]

Теорема 2. Нехай k – власне число лінійного перетворення f з матрицею A n -вимірного простору. Якщо r – ранг матриці $A - \lambda E$, то є $n - r$ лінійно-незалежних власних векторів перетворення f з власним числом k .

Доведення. Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця лінійного перетворення, то

координати власного вектора з власним числом k можна знайти з системи (2.7.1). Так як матриця $A - kE$ цієї системи за умовою теореми має ранг r , то простір рішень системи (2.7.1) є $(n-r)$ -вимірним і, отже, існує $n-r$ лінійно-незалежних власних векторів з власним числом k . ▲

ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ І ВЛАСНИХ ЧИСЕЛ

Метод знаходження власних векторів лінійного перетворення f , що має в деякому базисі матрицю A :

1. Складаємо характеристичне рівняння даного перетворення і знаходимо його корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, тобто характеристичні числа.
2. Виділяємо тільки ті характеристичні числа, які є власними числами даного перетворення.
3. У системі (2.7.1) вважаємо k рівним одному з власних чисел даного лінійного перетворення, наприклад, $k = \lambda_i$, і знаходимо нульове рішення $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ цієї системи.
4. Записуємо вектор $\vec{x}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, який є власним вектором даного перетворення з власним числом λ_i . Аналогічно робимо з іншими власними числами даного перетворення.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 3. Алгебраїчні лінії першого порядку на площині і в просторі

Тема 3.1 Рівняння прямої. Взаємне розміщення прямих. Розподіл відрізка в даному співвідношенні. Пучки прямих. Пряма в прямокутній системі координат. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої. Кут між прямими

Тема 3.2 Рівняння площини в просторі. Взаємне розташування площин. Пучки площин. Площина в прямокутній системі координат. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Напівплощини. Кут між площинами

Тема 3.3 Пряма у просторі. Взаємне розміщення прямих у просторі. Відстань від точки до прямої у просторі. Відстань між двома перехресними прямими. Знаходження загального перпендикуляра до двох перехресних прямих

Тема 4. Алгебраїчні лінії другого порядку на площині і в просторі

Тема 4.1 Еліпс, гіпербола, парабола та їх властивості. Рівняння кривої 2-го порядку в полярних координатах

Тема 4.2 Загальне рівняння кривої другого порядку. Квадратичні форми, критерій Сильвестра. Перетворення рівняння кривої при перетворенні координат

Тема 4.3 Канонічні рівняння поверхонь другого порядку: еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, циліндри і конуси. Перетин поверхонь другого порядку з площиною

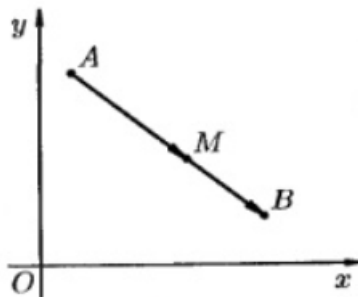
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 3. Алгебраїчні лінії першого порядку на площині і в просторі

Тема 3.1 Рівняння прямої. Взаємне розміщення прямих. Розподіл відрізка в даному співвідношенні. Пучки прямих. Пряма в прямокутній системі координат. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої. Кут між прямими

РОЗПОДІЛ ВІДРІЗКА У ДАНОМУ СПІВВІДНОШЕННІ

Розділимо відрізок AB , що з'єднує точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ в заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайдемо координати точки $M(x, y)$ відрізка AB такої, що $\frac{AM}{MB} = \lambda$.



Мал. 3.1.1

Введемо у розгляд вектори $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{MB}$ (див. мал. 3.1.1). Точка M ділить відрізок AB у відношенні λ , якщо $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$, але $\overrightarrow{AM} = \{x - x_1, y - y_1\}$, тобто $\overrightarrow{AM} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ і $\overrightarrow{MB} = \{x_2 - x, y_2 - y\}$, тобто $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$, тоді

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} = \lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j}.$$

З огляду на те, що рівні вектори мають рівні координати, отримуємо $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$ і $y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y$, тобто

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{і} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

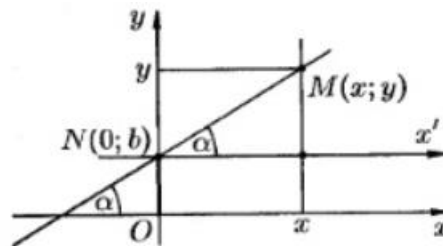
Визначення. Формули $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ і $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ називаються **формулами ділення відрізка в даному співвідношенні**.

Зокрема, при $\lambda = 1$, тобто якщо $AM = MB$, то вони приймуть вигляд $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ в цьому випадку точка $M(x, y)$ є серединою відрізка AB .

Зауваження. Якщо $\lambda = 0$, то це означає, що точки A і M збігаються, якщо $\lambda < 0$, то точка M лежить поза відрізком AB – кажуть, що точка M ділить відрізок AB зовнішнім чином ($\lambda \neq -1$, так як в іншому випадку $\frac{AM}{MB} = -1$, тобто $AM + MB = 0$, тобто $AB = 0$).

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ З КУТОВИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Нехай на площині Oxy задана довільна пряма, що не паралельна осі Oy . Її положення цілком визначається ординатою b точки $N(0, b)$ перетину з віссю Oy і кутом α між віссю Ox і прямою (див. мал. 3.1.2).



Мал. 3.1.2

Під кутом α ($0 \leq \alpha < \pi$) нахилу прямої розуміється найменший кут, на який потрібно повернути навколо точки перетину прямої і осі Ox проти годинникової стрілки вісь Ox до її збігу з прямою. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ (див. мал. 3.1.2). Проведемо через точку N вісь Nx' , паралельну осі Ox і однакою з нею напрямлену. Кут між віссю Nx' і прямою дорівнює α . В системі $Nx'y$ точка M має координати x і $y - b$. З визначення тангенса кута маємо рівність $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - b}{x}$, тобто $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$. Введемо позначення $\operatorname{tg} \alpha = k$ та отримуємо рівняння

$$y = kx + b, \quad (3.1.1)$$

якому задовольняють координати будь-якої точки $M(x, y)$ прямої. Можна переконатися, що координати будь-якої точки $P(x, y)$, що лежить поза даною прямою, рівняння (3.1.1) не задовольняють.

Визначення. Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*, а рівняння $y = kx + b$ – рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

- 1) Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і, отже, рівняння цієї прямої буде мати вигляд $y = kx$.
- 2) Якщо пряма паралельна осі Ox , то $\alpha = 0$, $k = \operatorname{tg} \alpha = 0$ отже, і рівняння набуде вигляду $y = b$.

3) Якщо пряма паралельна осі Oy , то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ рівняння (3.1.1) втрачає сенс, так як для неї кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не існує. У цьому випадку рівняння прямої буде мати вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину прямої з віссю Ox .

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Розглянемо рівняння першого степеня щодо x і y в загальному вигляді

$$Ax + By + C = 0 \quad (3.1.2)$$

де A, B, C – довільні числа, причому A і B не рівні нулю одночасно. Покажемо, що рівняння (3.1.2) є рівняння прямої лінії. Можливі два випадки:

1) Якщо $B = 0$, то рівняння (3.1.2) має вигляд $Ax + C = 0$, причому $A \neq 0$, тобто $x = -\frac{C}{A}$.

Це є рівняння прямої, яка паралельна осі Oy , що проходить через точку $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

2) Якщо $B \neq 0$, то з рівняння (3.1.2) отримуємо $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ – це є рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$.

Отже, рівняння $Ax + By + C = 0$ є рівняння прямої лінії, воно називається **загальним рівнянням прямої**.

Деякі окремі випадки загального рівняння прямої:

1) якщо $A = 0$, то рівняння приводиться до вигляду $y = -\frac{C}{B}$. Це є рівняння прямої, яка паралельна осі Ox ;

2) якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі Oy ,

3) якщо $C = 0$, то отримуємо $Ax + By = 0$. Рівняння задовольняють координати точки $O(0, 0)$, пряма проходить через початок координат.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ В ДАНОМУ НАПРЯМКУ

Нехай пряма проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і її напрямок характеризується кутовим коефіцієнтом k . Рівняння цієї прямої можна записати у вигляді $y = kx + b$, де b – поки невідома величина. Так як пряма проходить через точку $M(x_0, y_0)$, то координати точки задовольняють рівняння прямої: $y_0 = kx_0 + b$. Звідси $b = y_0 - kx_0$.

Підставляючи значення b в рівняння $y = kx + b$, отримаємо шукане рівняння прямої $y = kx + y_0 - kx_0$, тобто

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3.1.3)$$

Визначення. Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ з різними значеннями k називають також *рівняннями пучка прямих* з центром у точці $M(x_0, y_0)$. З цього пучка можна визначити лише пряму, паралельну осі Oy .

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ

Нехай пряма проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Рівняння прямої, що проходить через точку M_1 , має вигляд $y - y_1 = k(x - x_1)$, де k – поки невідомий коефіцієнт. Так як пряма проходить через точку $M_2(x_2, y_2)$, то координати цієї точки повинні задовольняти даним рівнянням: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, тоді $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Підставляючи знайдене значення k в рівняння $y - y_1 = k(x - x_1)$, отримаємо *рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2* :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.1.4)$$

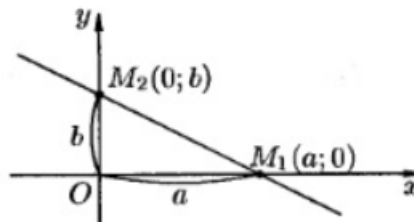
Передбачається, що в цьому рівнянні $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Якщо $x_2 = x_1$, то пряма, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, паралельна осі ординат. Її рівняння має вигляд $x = x_1$. Якщо $y_2 = y_1$, то рівняння прямої може бути записано у вигляді $y = y_1$, пряма M_1M_2 паралельна осі абсцис.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ВІДРІЗКАХ

Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1(a, 0)$, а вісь Oy – у точці $M_2(0, b)$ (див. мал. 3.1.3). У цьому випадку рівняння (3.1.4) набуде вигляду $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$, тобто

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3.1.5)$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої у відрізках*, так як числа a і b вказують, які відрізки відсікає пряма на осях координат.



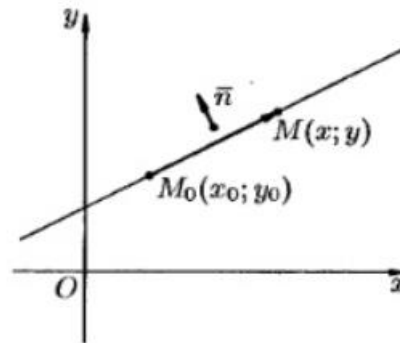
Мал. 3.1.3

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ДАНОМУ ВЕКТОРУ

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\vec{n} = \{A; B\}$. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і розглянемо вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ (див. мал. 3.1.4). Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overline{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (3.1.6)$$

Отримане рівняння називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору*.



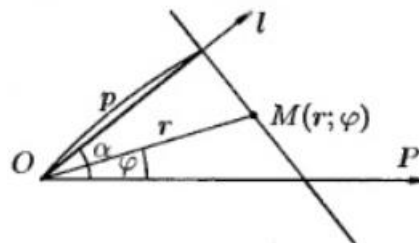
Мал. 3.1.4

Вектор $\vec{n} = \{A, B\}$ перпендикулярний прямій, називається *нормальним вектором* цієї прямої.

Рівняння (3.1.6) можна переписати в загальному вигляді $Ax + By + C = 0$, де A і B – координати нормального вектора, $C = -Ax_0 - By_0$ – вільний член.

ПОЛЯРНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Знайдемо рівняння прямої в полярних координатах. Її положення можна визначити, вказавши відстань p від полюса O до даної прямої і кут α між полярною віссю OP і віссю l , що проходить через полюс O перпендикулярно даній прямій (див. мал. 3.1.5). Для будь-якої точки $M(r, \varphi)$ на даній прямій маємо: $np_l \overline{OM} = p$



Мал. 3.1.5

З іншого боку, $np_l \overline{OM} = |\overline{OM}| \cdot \cos(\alpha - \varphi) = r \cdot \cos(\varphi - \alpha)$. Отже,

$$r \cos(\varphi - \alpha) = p \quad (3.1.7)$$

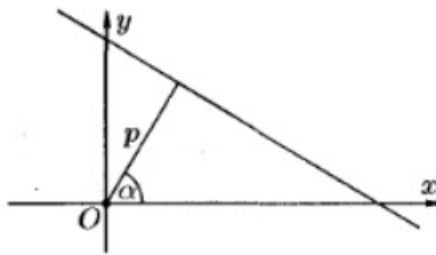
Отримане рівняння і є *рівняння прямої в полярних координатах*.

НОРМАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Нехай пряма визначається за допомогою p і α (див. мал. 3.1.6). Розглянемо прямокутну систему координат Oxy . Введемо полярну систему, взявши O за полюс і Ox за полярну вісь. Рівняння прямої можна записати у вигляді $r \cos(\varphi - \alpha) - p = 0$, тобто $r \cdot \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha - p = 0$. Але, в силу формул, що зв'язують прямокутні і полярні координати, маємо: $r \cos \varphi = x$, $r \sin \varphi = y$. Отже, рівняння (3.1.7) прямої в прямокутній системі координат набуде вигляду

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0 \quad (3.1.8)$$

Рівняння (3.1.8) називається *нормальним рівнянням прямої*.



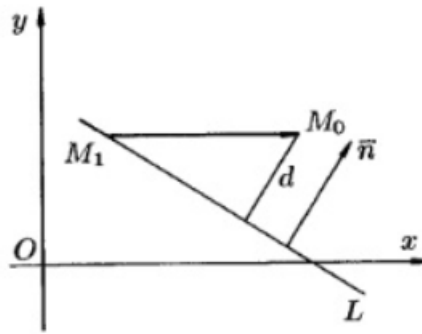
Мал. 3.1.6

Покажемо, як привести рівняння (3.1.2) прямої до вигляду (3.1.8). Помножимо всі члени рівняння (3.1.2) на деякий множник $\lambda \neq 0$. Отримаємо $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$. Це рівняння необхідно привести до рівняння (3.1.8). Отже, повинні виконуватися рівності: $\lambda A = \cos \alpha$, $\lambda B = \sin \alpha$, $\lambda C = -p$. З перших двох рівностей знаходимо $\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$.

Тобто $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – *нормуючий множник*. Згідно з третім рівністю $\lambda C = -p$ знак нормуючого множника протилежний знаку вільного члена C загального рівняння прямої.

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Нехай задані пряма L рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$ (див. мал. 3.1.7). Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої L .



Мал. 3.1.7

Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overline{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1)$ – довільна точка прямої L , на напрямок нормального вектора $\vec{n} = \{A, B\}$.

Отже,

$$d = |np_{\vec{n}} \overline{M_1M_0}| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так як точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій L , то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, тобто $C = -Ax_1 - By_1$. Тому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.1.9)$$

КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

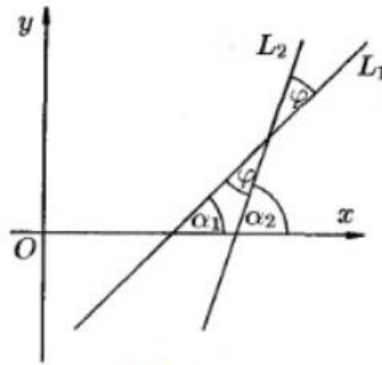
Нехай прямі L_1 і L_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ (див. мал. 3.1.8). Знайдемо кут φ , на який треба повернути в додатньому напрямку пряму L_1 навколо точки їх перетину до збігу з прямою L_2 . За теоремою про зовнішній кут трикутника $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ або $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Якщо $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$, але $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$. Тому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (3.1.10)$$

звідки отримаємо величину шуканого кута. Якщо потрібно обчислити гострий кут між прямими, не враховуючи, яка пряма є першою, яка – другою, то права частина формули

$$(3.1.10) \text{ береться за модулем, тобто } \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $\operatorname{tg} \varphi = 0$. З формули (3.1.10) маємо $k_2 - k_1 = 0$, тобто $k_2 = k_1$. І назад, якщо прямі L_1 і L_2 такі, що $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg} \varphi = 0$, тобто прямі паралельні. Отже, *умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів: $k_1 = k_2$.*



Мал. 3.1.8

Якщо прямі L_1 і L_2 перпендикулярні, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Отже, $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1+k_1 \cdot k_2}{k_2-k_1} = 0$. Звідси $1+k_1 \cdot k_2 = 0$, тобто $k_1 \cdot k_2 = -1$ (або $k_2 = -\frac{1}{k_1}$). Справедливо і зворотне твердження. Таким чином, *умовою перпендикулярності прямих є рівність $k_1 \cdot k_2 = -1$.*

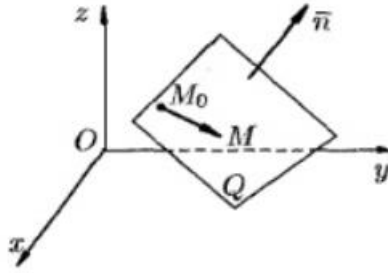
[Тема 3.2 Рівняння площини у просторі. Взаємне розташування площин. Пучки площин. Площина в прямокутній системі координат. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Напівплощини. Кут між площинами](#)

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНІ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ДАНОМУ ВЕКТОРУ

Нехай у просторі $Oxyz$ площина Q задана точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n} = \{A, B, C\}$, що перпендикулярний цій площині (див. мал. 1). Виведемо рівняння площини Q . Візьмемо на ній довільну точку $M(x, y, z)$ і складемо вектор $\vec{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$. При будь-якому розташуванні точки M на площині Q вектори $\vec{n}$ і $\vec{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їх скалярний добуток $\vec{n} \cdot \vec{M_0M} = 0$, тобто

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad (3.2.1)$$

Координати будь-якої точки площини Q задовольняють рівняння (3.2.1), координати точок, які не лежать на площині Q , цього рівняння не задовольняють (для них $\vec{n} \cdot \vec{M_0M} \neq 0$). Рівняння (3.2.1) називається *рівнянням площини, що проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$* . Воно першого степеня щодо поточних координат x, y, z . Вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ називається *нормальним вектором площини*.



Мал. 3.2.1

Надаючи коефіцієнтами A , B і C рівняння (3.2.1) різні значення, можна отримати рівняння будь-якої площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Визначення. Сукупність площин, що проходять через точку перетину трьох площин, називається **зв'язкою площин**, а рівняння зв'язки площин, тобто будь-якої площини, що проходить через дану точку має вигляд:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$$

де α , β і γ – будь-які числа, не рівні одночасно нулю. Саму цю точку можна знайти з рівняння зв'язки, підставляючи $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$; $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ і $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$ і вирішуючи отриману систему рівнянь.

Визначення. **Пучком площин** називаються всі площини, що проходять через лінію перетину двох площин. Рівняння пучка площин, тобто будь-якій площини, що проходить через лінію перетину двох площин, має вигляд:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

де α , β – будь-які числа, не рівні одночасно нулю. Рівняння самої цієї лінії можна знайти з рівняння пучка, підставляючи $\alpha = 1, \beta = 0$ і $\alpha = 0, \beta = 1$.

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНІ

Розглянемо загальне рівняння першого степеня з трьома змінними x , y і z :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.2.2)$$

Вважаючи, що принаймні один з коефіцієнтів A , B або C не дорівнює нулю, наприклад $B \neq 0$, перепишемо рівняння (3.2.2) у вигляді $A(x - 0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z - 0) = 0$. Отже, отримуємо рівняння площини з нормальним вектором $\vec{n} = \{A, B, C\}$, що проходить через точку $M_1\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$.

Отже, рівняння (3.2.2) визначає в системі координат $Oxyz$ деяку площину і називається **загальним рівнянням площини**.

Окремі випадки загального рівняння площини:

1. Якщо $D=0$, то воно набуває вигляду $Ax+By+Cz=0$. Цьому рівнянню задовольняє точка $O(0,0,0)$. Отже, в цьому випадку **площина проходить через початок координат**.

2. Якщо $C=0$, то маємо рівняння $Ax+By+D=0$. Нормальний вектор $\vec{n}=\{A,B,C\}$ перпендикулярний осі Oz . Отже, **площина паралельна осі Oz** ; якщо $B=0$ – паралельна осі Oy , $A=0$ – паралельна осі Ox .

3. Якщо $C=D=0$, то площина проходить через $O(0,0,0)$ паралельно осі Oz , тобто **площина $Ax+By=0$ проходить через вісь Oz** . Аналогічно, рівнянням $By+Cz=0$ і $Ax+Cz=0$ відповідають площини, що проходять відповідно через осі Ox і Oy .

4. Якщо $A=B=0$, то рівняння (3.2.2) набуває вигляду $Cz+D=0$, тобто $z=-\frac{D}{C}$.

Площина паралельна площині Oxy . Аналогічно, рівнянням $Ax+D=0$ і $By+D=0$ відповідають площині, відповідно паралельні площинам Oyz і Oxz .

5. Якщо $A=B=D=0$, то рівняння (3.2.2) набуде вигляду $Cz=0$, тобто $z=0$. Це **рівняння площини Oxy** . Аналогічно: $y=0$ – рівняння площини Oxz ; $x=0$ – рівняння площини Oyz .

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ДАНІ ТОЧКИ

Три точки простору, що не лежать на одній прямій, визначають єдину площину. Знайдемо рівняння площини Q , що проходить через три дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій. Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і складемо вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

Ці вектори лежать на площині Q , отже, вони компланарні. Використовуємо умову компланарності трьох векторів (їх мішаний добуток дорівнює нулю), отримуємо $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.3)$$

Рівняння (3.2.3) є **рівняння площини, що проходить через три дані точки**

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ У ВІДРІЗКАХ

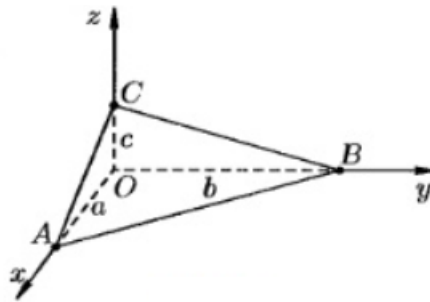
Нехай площина відсікає на осях Ox , Oy і Oz відповідно відрізки a , b і c , тобто проходить через три точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ і $C(0, 0, c)$ (див. мал. 3.2.2). Підставляючи координати цих точок в рівняння (3.2.3), отримуємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Розкривши визначник, маємо $bcx - abc + abz + acy = 0$, тобто $bcx + acy + abz = abc$, або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3.2.4)$$

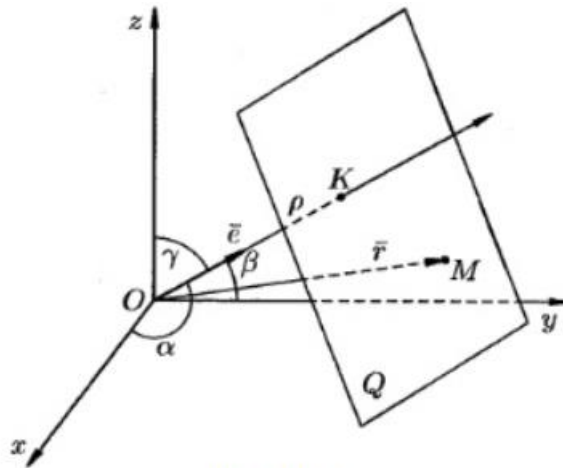
Рівняння (3.2.4) називається *рівнянням площини у відрізках на осях*. Їм зручно користуватися при побудові площини.



Мал. 3.2.2

НОРМАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Положення площини Q цілком визначається завданням одиничного вектора $\vec{e}$, що має напрямок перпендикуляра OK , опущеного на площину з початку координат, і довжиною p цього перпендикуляра (див. мал. 3.2.3). Нехай $OK = p$, а α, β, γ – кути, утворені одиничним вектором $\vec{e}$ з осями Ox, Oy і Oz . Тоді $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.



Мал. 3.2.3

Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і з'єднаємо її з початком координат. Утворюємо вектор $\vec{r} = \overline{OM} = \{x, y, z\}$. При будь-якому положенні точки M на площині Q проекція радіус-вектора $\vec{r}$ на напрямок вектора $\vec{e}$ завжди дорівнює p : $p \vec{e} \cdot \vec{r} = p$, тобто $\vec{r} \cdot \vec{e} = p$ або

$$\vec{r} \cdot \vec{e} - p = 0 \quad (3.2.5)$$

Рівняння (3.2.5) називається **нормальним рівнянням площини у векторній формі**. Знаючи координати векторів $\vec{r}$ і $\vec{e}$, рівняння (3.2.5) перепишемо у вигляді

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3.2.6)$$

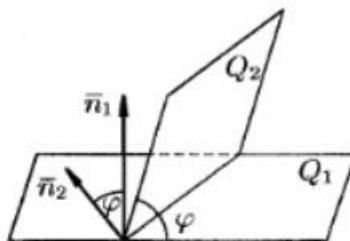
Рівняння (3.2.6) називається **нормальним рівнянням площини в координатній формі**.

Відзначимо, що загальне рівняння площини (3.2.2) можна привести до нормального рівняння так, як це робилося для рівняння прямої на площині. А саме: помножити обидві частини рівняння (3.2.2) на нормуючий множник $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, де знак береться протилежним знаку вільного члена D загального рівняння площини.

КУТ МІЖ ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Нехай задані дві площини $Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Визначення. *Кутом між площинами* Q_1 і Q_2 називається один з двограних кутів, утворених цими площинами.



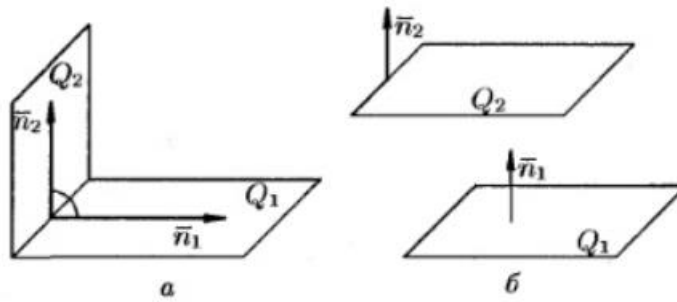
Мал. 3.2.4

Кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ площин Q_1 і Q_2 дорівнює одному з цих кутів (див. мал. 3.2.4). Тому

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad \text{або} \quad \cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для знаходження гострого кута слід взяти модуль правої частини.

Якщо площині Q_1 і Q_2 перпендикулярні (див. мал. 3.2.5,а), то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (і навпаки). Але тоді $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, тобто $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$. Отримана рівність є **умова перпендикулярності двох площин** Q_1 і Q_2 .



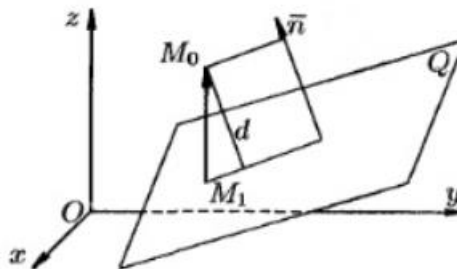
Мал. 3.2.5

Якщо площини Q_1 і Q_2 паралельні (див. мал. 3.2.5,б), то будуть паралельні і $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ (і навпаки). Але тоді, як відомо, координати векторів пропорційні: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 0$. Це і є **умова паралельності двох площин** Q_1 і Q_2 .

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ

Нехай задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і площина Q своїм рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Мал. 3.2.6

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q дорівнює модулю проекції вектора $\overline{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – довільна точка площини Q , на напрямок нормального вектора $\bar{n} = \{A, B, C\}$ (див. мал. 6). Отже,

$$\begin{aligned} d = |np_{\bar{n}} \overline{M_1M_0}| &= \frac{|\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

А так як точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині Q , то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, тобто $D = Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Тому $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Відзначимо, що якщо площина Q задана рівнянням $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, то відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q може бути знайдена за формулою

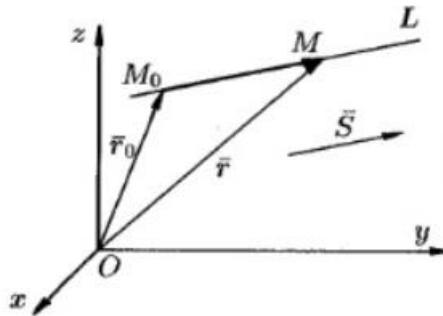
$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|.$$

Тема 3.3 Пряма у просторі. Взаємне розміщення прямих у просторі. Відстань від точки до прямої у просторі. Відстань між двома перехресними прямими. Знаходження загального перпендикуляра до двох перехресних прямих

ВЕКТОРНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Положення прямої у просторі цілком визначено, якщо задати будь-яку точку M_0 на прямій і вектор $\vec{S}$, паралельний цій прямій. Вектор $\vec{S}$ називається **напрямним вектором прямої**. Нехай пряма L задана її точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S} = \{m, n, p\}$.

Візьмемо на прямій L довільну точку $M(x, y, z)$. Позначимо радіус-вектори точок M_0 і M відповідно через $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$.



Мал. 3.3.1

Очевидно, що три вектори $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ і $\overline{M_0M}$ пов'язані співвідношенням $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overline{M_0M}$. Вектор $\overline{M_0M}$, що лежить на прямій L , паралельний напрямному вектору $\vec{S}$, тому $\overline{M_0M} = t\vec{S}$, де t – скалярний множник, який називається **параметром**, може набувати різних значень залежно від положення точки M на прямій (див. мал. 3.3.1). Рівняння $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overline{M_0M}$ можна записати у вигляді

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S} \quad (3.3.1)$$

Отримане рівняння називається **векторним рівнянням прямої**.

ПАРАМЕТРИЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Помічаючи, що $\bar{r} = \{x, y, z\}$, $\bar{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $t\bar{S} = \{tm, tn, tp\}$ рівняння (3.3.1) можна записати у вигляді

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}$$

Звідси випливають рівності:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Вони називаються *параметричними рівняннями прямої* в просторі.

КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Нехай $\bar{S} = \{m, n, p\}$ напрямний вектор прямої L і $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, що лежить на цій прямій. Вектор $\overline{M_0M}$, що з'єднує точку M_0 з довільною точкою $M(x, y, z)$ прямої L , паралельний вектору $\bar{S}$. Тому координати вектора $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ і вектора $\bar{S} = \{m, n, p\}$ пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3.3.3)$$

Рівняння (3.3.3) називаються *канонічними рівняннями прямої у просторі*.

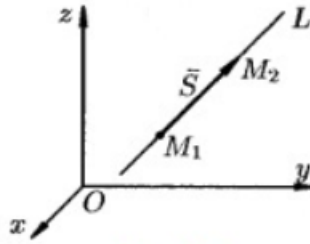
Зауваження. 1) Рівняння (3.3.3) можна було б отримати відразу з параметричних рівнянь прямої (3.3.2), виключивши параметр t . З рівнянь (3.3.2) знаходимо

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

2) Перетворення в нуль одного із знаменників рівнянь (3.3.3) означає перетворення на нуль відповідного чисельника.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ

Нехай пряма L проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В якості напрямного вектора $\bar{S}$ можна взяти вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, тобто $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ (див. мал. 3.3.2). Отже, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$.



Мал. 3.3.2

Оскільки пряма проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то, відповідно рівнянням

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, рівняння прямої L мають вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (3.3.4)$$

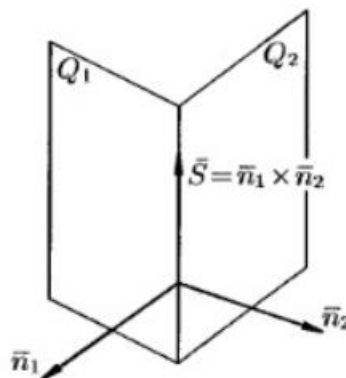
Рівняння (3.3.4) називаються *рівняннями прямої, що проходить через дві дані точки*.

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Пряму в просторі можна задати як лінію перетину двох непаралельних площин. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Кожне з рівнянь цієї системи визначає площину. Якщо площини не паралельні (координати векторів $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ не пропорційні), то система (3.3.5) визначає пряму L як геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють кожному з рівнянь системи (див. мал. 3.3.3). Рівняння (3.3.5) називаються *загальними рівняннями прямої*. Від загальних рівнянь (3.3.5) можна перейти до канонічних рівнянь $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.



Мал. 3.3.3

Координати точки M_0 на прямій L отримуємо з системи рівнянь (3.3.5), надавши одній з координат довільне значення (наприклад, $z = 0$). Так як пряма L перпендикулярна до векторів $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$, то за напрямний вектор $\bar{S}$ прямої L можна прийняти векторний добуток $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, тобто:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Зауваження. Канонічні рівняння прямої легко отримати, взявши дві будь-які точки на ній і застосувавши рівняння $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

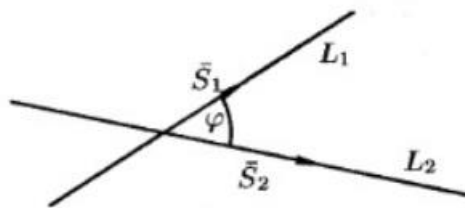
Нехай прямі $L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ і $L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$.

Кутом між прямими називають кут між напрямними векторами $\bar{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ і $\bar{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ (див. мал. 3.3.4). Тому, за відомою формулою для косинуса кута між

векторами, отримуємо $\cos \varphi = \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1| \cdot |\bar{S}_2|}$ або

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (3.3.6)$$

Для знаходження гострого кута між прямими L_1 і L_2 чисельник правої частини формули (3.3.6) потрібно взяти за модулем.



Мал. 3.3.4

Якщо прямі L_1 і L_2 **перпендикулярні**, то в цьому і тільки в цьому випадку маємо $\cos \varphi = 0$. Отже, чисельник дробу (3.3.6) дорівнює нулю $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Якщо прямі L_1 і L_2 **паралельні**, то паралельні їх напрямні вектори $\bar{S}_1$ і $\bar{S}_2$. Отже, координати цих векторів пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

УМОВА, ПРИ ЯКІЙ ДВІ ПРЯМІ ЛЕЖАТЬ В ОДНІЙ ПЛОЩИНІ

Нехай прямі задані канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

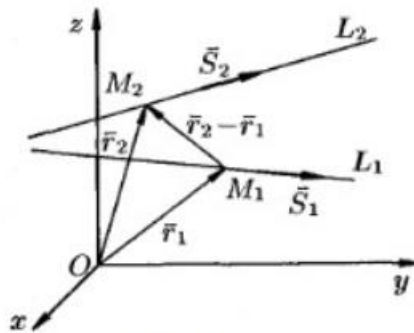
Їх напрямні вектори відповідно $\bar{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ і $\bar{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ (див. мал. 3.3.5). Пряма L_1 проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, радіус-вектор якої позначимо через $\bar{r}_1$; пряма L_2 проходить через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$, радіус-вектор якої позначимо через $\bar{r}_2$. Тоді

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині, якщо вектори $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ і $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ компланарні. Умовою компланарності векторів є рівність нулю їх мішаного добутку: $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{S}_1\bar{S}_2 = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

При виконанні цієї умови прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині, тобто або перетинаються, якщо $\bar{S}_2 \neq \lambda \bar{S}_1$, або паралельні, якщо $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$.

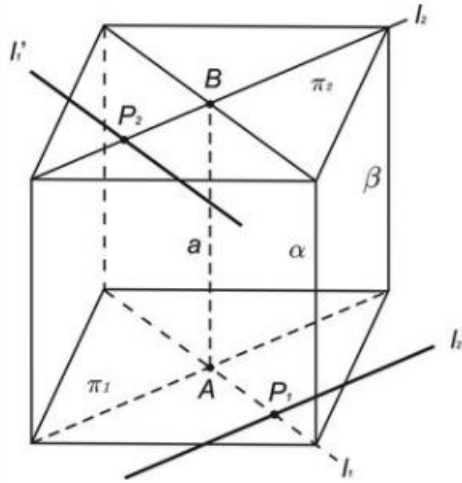


Мал. 3.3.5

ПЕРЕХРЕСНІ ПРЯМІ

Перехресні прямі – не паралельні і не прямі, що перетинаються, тобто прямі що не лежать в одній площині і не мають спільних точок.

Відстанню d між перехресними прямими l_1 і l_2 називається $d = \inf_{P \in l_1, Q \in l_2} |PQ|$.



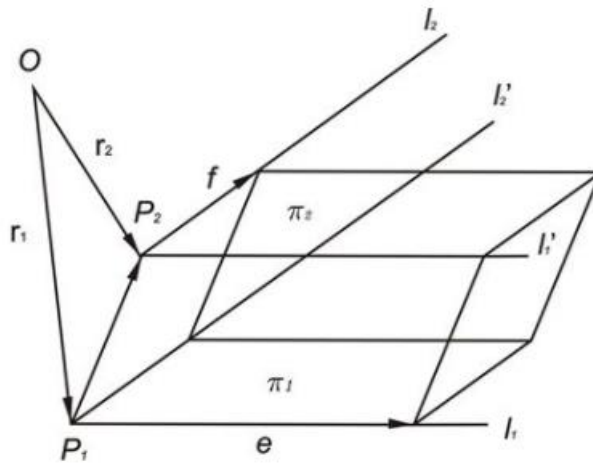
Мал. 3.3.6

Нехай $P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$. Через точку P_1 проведемо пряму l'_1 паралельну l_2 , а через P_2 – $l'_2 \parallel l_1$. Через прямі l_1 , l'_1 проведемо площину π_1 , через l_2 , l'_2 – площину π_2 , отримуємо $\pi_1 \parallel \pi_2$ (мал. 3.3.6). Відстань між цими паралельними площинами π_1 і π_2 є відстанню між перехресними прямими l_1 і l_2 .

Через пряму l_1 і нормаль n до площини π_1 проведемо площину α , аналогічно через l_2 і n проведемо площину β . Площини α і β перетинаються по прямій a , яка перетинає пряму l_1 в точці A , пряму l_2 – в точці B . Пряма $a \perp \pi_1(\pi_2) \Rightarrow a \perp l_1(l_2)$.

Доведемо, що довжина відрізка AB є відстанню між перехресними прямими l_1 і l_2 . Введемо у просторі прямокутну систему координат наступним чином. Точку A приймемо за початок координат, вісь x направимо по прямій l_1 , площину π_1 приймемо за координатну площину xy , додатній напрямок осі z задамо вектором $\overrightarrow{AB}$, тоді точки прямої l_1 мають координати $(t, 0, 0)$, при $t=0$ отримуємо точку A ; точки прямої l_2 мають координати $(\alpha\tau, \beta\tau, c)$, де $c = |AB|$, при $\tau=0$ отримуємо точку B .

Відстань між довільними точками прямих задовольняють нерівності $\sqrt{(\alpha\tau - t)^2 + (\beta\tau)^2 + c^2} \geq c = |AB|$; причому рівність досягається лише коли $\alpha\tau - t = 0$, $\beta\tau = 0$, тобто коли $\tau = t = 0$. Таким чином, відстань між прямими l_1 і l_2 досягається в точках A і B .



Мал. 3.3.7

Нехай r_1, r_2 – радіус-вектори відповідно точок P_1, P_2 , а e, f – напрямні вектори прямих l_1 і l_2 відповідно. Розглянемо паралелепіпед натягнутий на вектори $r_2 - r_1, e, f$ (мал. 3.3.7). Об'єм паралелепіпеда можна обчислити двома способами: $V = |(r_2 - r_1, e, f)|$, $V = Sh$, де $S = |e \times f|$ – площа основи, $h = d$ – висота. Звідки

$$d = \frac{|(r_2 - r_1, e, f)|}{|e \times f|}$$

Рівняння загального перпендикуляру прямих. Загальний перпендикуляр до перехресних прямих l_1 і l_2 – це пряма перетину площин α і β . Рівняння площини α має вигляд $\langle r - r_1, (e \times f) \times e \rangle = 0$, оскільки $(e \times f) \times e$ – вектор нормалі до площини α і площина проходить через точку P_1 .

Аналогічно рівнянням площини β буде $\langle r - r_2, (e \times f) \times f \rangle = 0$. Отже, рівняння загального перпендикуляра до перехресних прямих має вигляд:

$$\begin{cases} \langle r - r_1, (e \times f) \times e \rangle = 0 \\ \langle r - r_2, (e \times f) \times f \rangle = 0 \end{cases}$$

Тема 4. Алгебраїчні лінії другого порядку на площині і у просторі

Тема 4.1 Еліпс, гіпербола, парабола та їх властивості. Рівняння кривої 2-го порядку в полярних координатах

ЕЛІПС

Канонічне рівняння еліпса

Визначення. *Еліпсом* називається множина всіх точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є постійна величина, більша ніж відстань між фокусами. Еліпс – крива другого порядку.

Позначимо фокуси через F_1 і F_2 , відстань між ними через $2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів – через $2a$ (див. мал. 4.1.1). За визначенням $2a > 2c$, тобто $a > c$. Для виведення рівняння еліпса виберемо систему координат Ox так, щоб фокуси F_1 і F_2 лежали на осі Ox , а початок координат співпадав з серединою відрізка F_1F_2 . Тоді фокуси матимуть такі координати: $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$.

Нехай $M(x, y)$ довільна точка еліпса. Тоді, згідно з визначенням еліпса, $MF_1 + MF_2 = 2a$, тобто

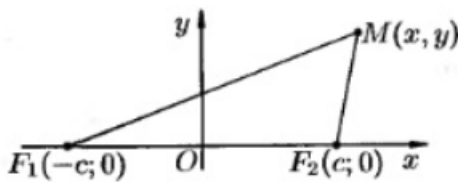
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (4.1.1)$$

Це і є рівняння еліпса. Перетворимо рівняння (4.1.1) до простішого вигляду наступним чином:

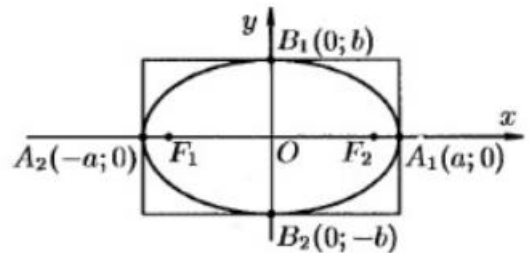
$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \Leftrightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Leftrightarrow \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Так як $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Покладемо $a^2 - c^2 = b^2$. Тоді останнє рівняння прийме вигляд $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{канонічне рівняння еліпса.} \quad (4.1.2)$$



Мал. 4.1.1



Мал. 4.1.2

Дослідження форми еліпса за його рівнянням

Встановимо форму еліпса, користуючись його канонічним рівнянням.

1) Рівняння еліпса містить x та y тільки в парних степенях, тому якщо точка (x, y) належить еліпсу, то йому також належать точки $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$. Звідси випливає, що еліпс симетричний щодо осей Ox і Oy , а також щодо точки $O(0, 0)$, яку називають **центром еліпса**.

2) Знайдемо точки перетину еліпса з осями координат. Поклавши $y=0$, знаходимо дві точки $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$, в яких вісь Ox перетинає еліпс (див. мал. 4.1.2). Поклавши в рівнянні еліпса $x=0$, знаходимо точки перетину еліпса з віссю Oy : $B_1(0,b)$ і $B_2(0,-b)$. Точки A_1 , A_2 , B_1 , B_2 називаються **вершинами еліпса**. Відрізки A_1A_2 і B_1B_2 , а також їх довжини $2a$ і $2b$ називаються відповідно **великою** і **малою осями** еліпса. Числа a і b називаються відповідно **великою** і **малою півосями** еліпса.

3) З рівняння еліпса випливає, що кожний доданок в лівій частині не перевищує одиниці, тобто мають місце нерівності $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ або $-a \leq x \leq a$ і $-b \leq y \leq b$. Отже, всі точки еліпса лежать всередині прямокутника, утвореного прямими $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4) У рівнянні еліпса сума невід'ємних доданків $\frac{x^2}{a^2}$ і $\frac{y^2}{b^2}$ дорівнює одиниці. Отже, при зростанні одного доданка інший буде зменшуватися, тобто якщо $|x|$ зростає, то $|y|$ зменшується і навпаки. Зі сказаного випливає, що еліпс має форму, зображену на мал. 4.1.2 (овальна замкнута крива).

Форма еліпса залежить від відношення $\frac{b}{a}$. При $b=a$ еліпс перетворюється в коло, рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ приймає вид $x^2 + y^2 = a^2$. Як характеристики форми еліпса частіше користуються відношенням $\frac{c}{a}$.

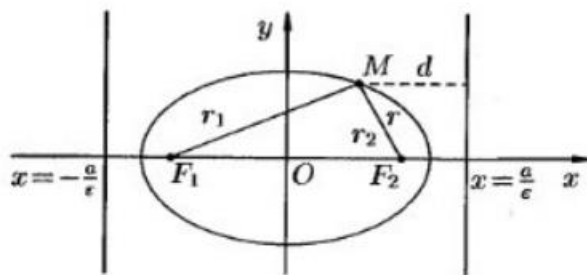
Визначення. Відношення $\frac{c}{a}$ половини відстані між фокусами до великої півосі еліпса називається **ексцентриситетом** еліпса і позначається буквою ε («Епсілон»): $\varepsilon = \frac{c}{a}$, причому $0 < \varepsilon < 1$, так як $0 < c < a$.

З урахуванням рівності $a^2 - c^2 = b^2$ формулу $\varepsilon = \frac{c}{a}$ можна переписати у вигляді

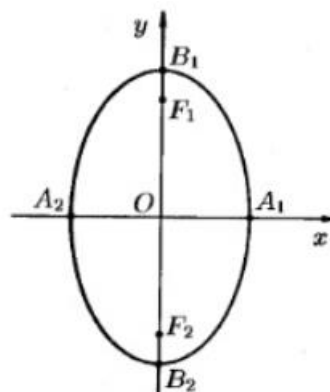
$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \text{ тобто } \varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ і } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Звідси видно, що чим менше ексцентриситет еліпса, тим еліпс буде менш сплющеним; якщо покласти $\varepsilon = 0$, то еліпс перетворюється в коло.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса з фокусами F_1 і F_2 (див. мал. 4.1.3). Довжини відрізків $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ називаються **фокальними радіусами** точки M . Очевидно, $r_1 + r_2 = 2a$. Мають місце формули $r_1 = a + \varepsilon x$ і $r_2 = a - \varepsilon x$. Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами** еліпса.



Мал. 4.1.3



Мал. 4.1.4

Теорема. Якщо r – відстань від довільної точки еліпса до якого-небудь фокуса, d – відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є постійна величина, рівна ексцентриситету еліпса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

З рівності $a^2 - c^2 = b^2$ випливає, що $a > b$. Якщо ж $a < b$, то рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ визначає еліпс, велика вісь якого $2b$ лежить на осі Oy , а мала вісь $2a$ – на осі Ox (див. мал. 4.1.4). Фокуси такого еліпса знаходяться в точках $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$, де $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

ГІПЕРБОЛА

Канонічне рівняння гіперболи

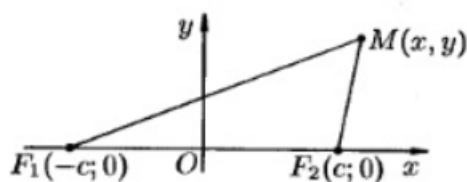
Визначення. *Гіперболою* називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох даних точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є величина постійна, менша за відстань між фокусами. Гіпербола є лінія другого порядку.

Позначимо фокуси через F_1 і F_2 , відстань між ними через $2c$, а модуль різниці відстаней від кожної точки гіперболи до фокусу через $2a$. За визначенням $2a < 2c$, тобто $a < c$.

Для виведення рівняння гіперболи виберемо систему координат Ox так, щоб фокуси F_1 і F_2 лежали на осі Ox , а початок координат співпадав з серединою відрізка F_1F_2 (див. мал. 4.1.5). Тоді фокуси будуть мати координати $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Тоді згідно з визначенням гіперболи $|MF_1 - MF_2| = 2a$ або $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$, тобто $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$. Після спрощень, як це було зроблено при отриманні рівняння еліпса, отримуємо $b^2 = c^2 - a^2$, отже канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.1.3)$$



Мал. 4.1.5

Дослідження форми гіперболи по її рівняння

Встановимо форму гіперболи, користуючись її канонічним рівнянням.

1) Рівняння (4.1.3) містить x та y тільки в парних степенях. Отже, гіпербола симетрична щодо осей Ox і Oy , а також щодо точки $O(0,0)$, яку називають **центром гіперболи**.

2) Знайдемо точки перетину гіперболи з осями координат. Поклавши $y=0$ в рівнянні (4.1.3), знаходимо дві точки перетину гіперболи з віссю Ox : $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$. Поклавши $x=0$ в (4.1.3), отримуємо $y^2 = -b^2$, чого бути не може. Отже, вісь Oy гіпербола не перетинає.

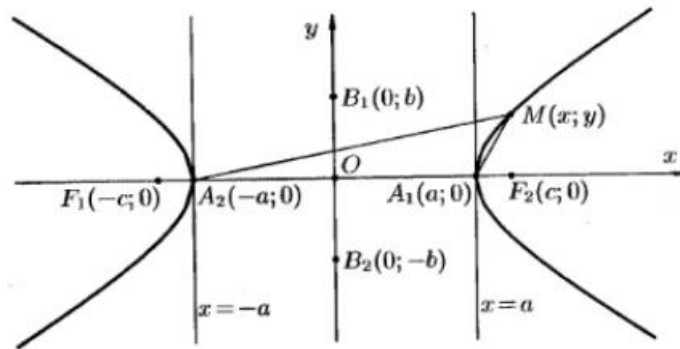
Точки $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$ називаються **вершинами гіперболи**, а відрізок $A_1A_2 = 2a$ – **дійсною віссю**, відрізок $OA_1 = OA_2 = a$ – **дійсною піввіссю** гіперболи.

Відрізок B_1B_2 ($B_1B_2 = 2b$), що з'єднує точки $B_1(0,b)$ і $B_2(0,-b)$ називається **уявною віссю**, число b – **уявною** піввіссю. Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$ називається **основним прямокутником гіперболи**.

3) З рівняння гіперболи отримуємо, що зменшувальне $\frac{x^2}{a^2}$ не менше одиниці, тобто що $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ або $|x| \geq a$. Це означає, що точки гіперболи розташовані праворуч від прямої $x = a$ (**права гілка гіперболи**) і зліва від прямої $x = -a$ (**ліва гілка гіперболи**).

4) З рівняння гіперболи видно, що коли $|x|$ зростає, то $|y|$ також зростає. Це впливає з того, що різниця $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ зберігає постійне значення, яке дорівнює одиниці.

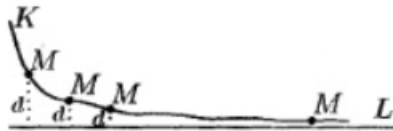
Зі сказаного випливає, що гіпербола має форму, зображену на малюнку 4.1.6 (крива, що складається з двох необмежених гілок).



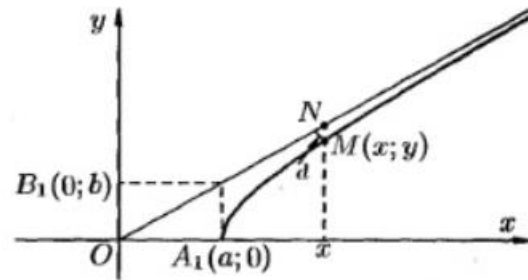
Мал. 4.1.6

Асимптоти гіперболи

Визначення. Пряма L називається *асимптотою* необмеженої кривої K , якщо відстань d від точки M кривої K до цієї прямої прямує до нуля при необмеженому віддаленні точки M уздовж кривої K від початку координат. На малюнку 4.1.7 приведена ілюстрація поняття асимптоти: пряма L є асимптотою для кривої K .



Мал. 4.1.7



Мал. 4.1.8

Покажемо, що гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ має дві асимптоти: $y = \frac{b}{a}x$ і $y = -\frac{b}{a}x$.

Так як прямі $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ і гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ симетричні щодо координатних осей, то досить розглянути тільки ті точки зазначених ліній, які розташовані в першій чверті. Візьмемо на прямій $y = \frac{b}{a}x$ точку N , яка має ту ж абсцису x , що і точка $M(x, y)$ на гіперболі $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (див. мал. 4.1.8), і знайдемо різницю MN між ординатами прямої та гілкою гіперболи:

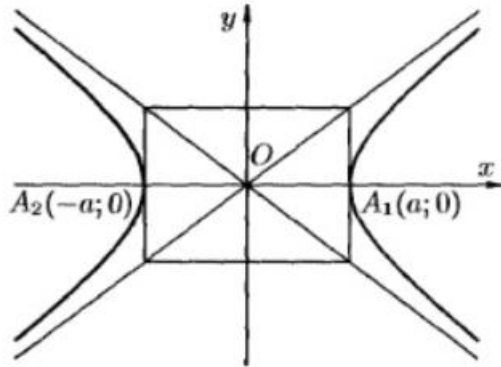
$$\begin{aligned} MN &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Як видно, при зростанні x знаменник дробу збільшується; чисельник — є постійна величина. Стало бути, довжина відрізка MN прагне до нуля. Так як MN більше відстані d

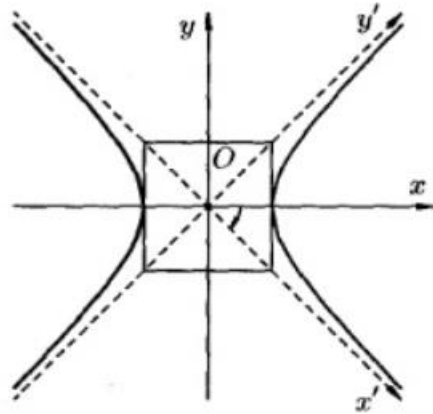
від точки M до прямої, то d і поготів прямує до нуля. Отже, прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ – **асимптоти гіперболи**.

При побудові гіперболи доцільно спочатку побудувати основний прямокутник гіперболи (див. мал. 4.1.9), провести прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника – асимптоти гіперболи і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи.

Рівняння рівносторонньої гіперболи, асимптотами якої є вісі координат.



Мал. 4.1.9



Мал. 4.1.10

Визначення. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається **рівносторонньою**, якщо її півосі рівні ($a = b$). Її канонічне рівняння $x^2 - y^2 = a^2$.

Асимптоти рівносторонньої гіперболи мають рівняння $y = x$ і $y = -x$ і, отже, є бісектрисами координатних кутів.

Розглянемо рівняння цієї гіперболи в новій системі координат $Ox'y'$ (див. мал. 4.1.10), яку отримали зі старої поворотом осей координат на кут $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Використовуємо формули

повороту осей координат:
$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

Підставляємо значення x і y в рівняння $x^2 - y^2 = a^2$:

$$\left(x' \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) - y' \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)^2 - \left(x' \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + y' \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(-x' + y')^2 = a^2 \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{a^2}{2} \text{ або } y' = \frac{k}{x'}, \text{ де } k = \frac{a^2}{2}.$$

Рівняння рівносторонньої гіперболи, для якої осі Ox і Oy є асимптотами, матиме вигляд

$$y = \frac{k}{x}.$$

Визначення. *Ексцентриситетом* гіперболи називається відношення відстані між фокусами до величини дійсної осі гіперболи, позначається ε : $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Так як для гіперболи $c > 0$, то ексцентриситет гіперболи більше одиниці: $\varepsilon > 1$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Дійсно, з рівності $b^2 = c^2 - a^2$ випливає,

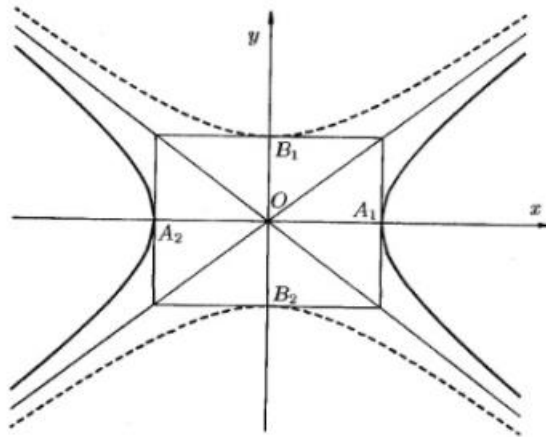
що $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1$, тобто $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ і $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Звідси видно, що чим менше

ексцентриситет гіперболи, тим менше відношення $\frac{b}{a}$ її півосей, а значить, тим більше витягнутий її основний прямокутник.

Ексцентриситет рівносторонньої гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$. Дійсно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

Фокальні радіуси $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ і $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ для точок правої гілки гіперболи мають вигляд $r_1 = \varepsilon x + a$ і $r_2 = \varepsilon x - a$, а для лівої гілки гіперболи $r_1 = -(\varepsilon x + a)$ і $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.



Мал. 4.1.11

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* гіперболи. Так як для гіперболи $\varepsilon > 0$, то

$\frac{a}{\varepsilon} < a$. Це означає, що права директриса розташована між центром і правою вершиною гіперболи, ліва – між центром і лівою вершиною. Директриси гіперболи мають ту ж властивість $\frac{r}{d} = \varepsilon$, що і директриси еліпса. Крива, яка визначається рівнянням

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1$, також є гіпербола, дійсна вісь $2b$ якої розташована на осі Oy , а уявна вісь $2a$ – на осі Ox . На малюнку 4.1.11 вона зображена пунктиром. Очевидно, що гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1$ мають загальні асимптоти. Такі гіперболи називаються *спряженими*.

ПАРАБОЛА

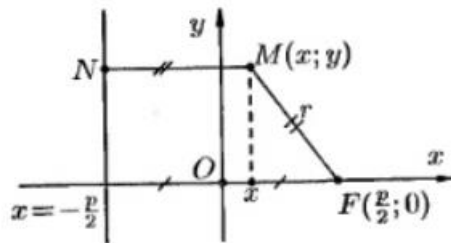
Канонічне рівняння параболі

Визначення. *Параболою* називається множина всіх точок площини, кожна з яких однаково віддалена від даної точки, що називається **фокусом**, і даної прямої – **директриси**. Відстань від фокуса F до директриси називається **параметром параболі** і позначається через p ($p > 0$). Парабола є лінія другого порядку.

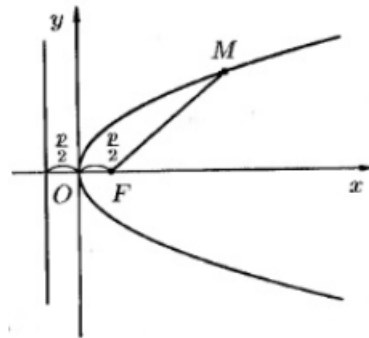
Для виведення рівняння параболі виберемо систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно директриси в напрямку від директриси до F , а початок координат $O(0,0)$ розташуємо посередині між фокусом і директоркою (див. мал.

4.1.12). У вибраній системі фокус F має координати $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а рівняння директриси має

вигляд $x = -\frac{p}{2}$ або $x + \frac{p}{2} = 0$.



Мал. 4.1.12



Мал. 4.1.13

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболі. З'єднаємо точку M з F . Проведемо відрізок MN перпендикулярно директриси. Згідно з визначенням параболі $MF = MN$. За формулою

відстані між двома точками знаходимо: $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, а $MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$

Отже, $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$.

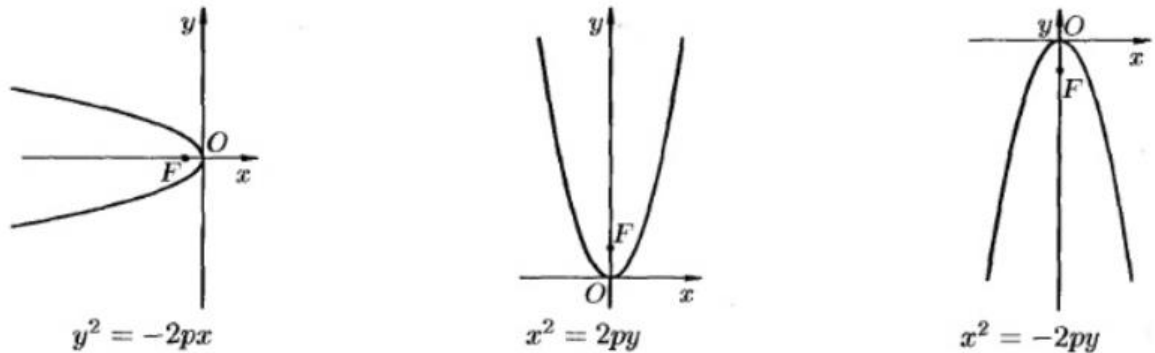
Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}, \text{ тобто}$$

$$y^2 = 2px - \text{канонічне рівняння параболі.}$$

Дослідження форм параболи по її рівняння

- 1) У рівнянні $y^2 = 2px$ змінна y входить в парному степені, значить, парабола симетрична щодо осі Ox ; вісь Ox є віссю симетрії параболи.
- 2) Так як $p > 0$, то з рівняння параболи маємо, що $x \geq 0$. Отже, парабола розташована праворуч від осі Oy .
- 3) При $x = 0$ маємо $y = 0$. Отже, парабола проходить через початок координат.
- 4) При необмеженому зростанні x модуль y також необмежено зростає. Парабола $y^2 = 2px$ має вигляд (форму), зображений на малюнку 4.1.13. Точка $O(0, 0)$ називається **вершиною параболи**, відрізок $FM = r$ називається **фокальним радіусом** точки M .



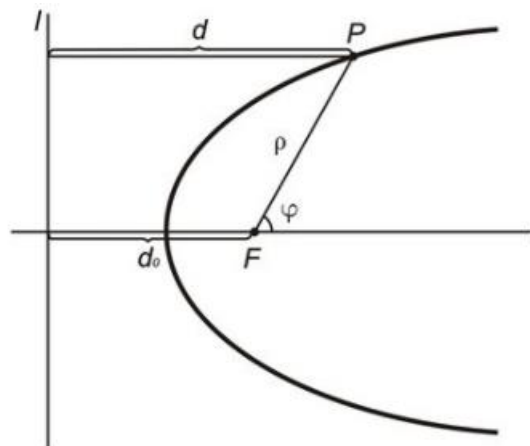
Мал. 4.1.14

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ ($p > 0$) також визначають параболи, вони зображені на малюнку 4.1.14.

Неважко показати, що графік квадратного тричлена $y = Ax^2 + Bx + C$, де $A \neq 0$, B і C будь-які дійсні числа, представляє собою параболу в сенсі наведеного вище її визначення.

РІВНЯННЯ КРИВИЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Введемо полярну систему координат (ρ, φ) наступним чином: нехай полюсом буде один з фокусів кривої 2-го порядку. Полярною віссю – пряма перпендикулярна до директриси (напрямок полярної осі від директриси до фокусу).



Мал. 4.1.15

Знаючи, що для точок кривої 2-го порядку $\varepsilon = \frac{\rho}{d}$, але $d = d_0 + \rho \cos \varphi$, значить, рівняння кривої другого порядку (еліпса, правої гілки гіперболи і параболі) в полярній системі координат: $\frac{\rho}{d_0 + \rho \cos \varphi} = \varepsilon$ або $\rho = \frac{d_0 \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$. Згадаймо, що $d_0 \varepsilon = p$, тоді рівняння еліпса, правої гілки гіперболи і параболі має вигляд:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Тема 4.2 Загальне рівняння кривої другого порядку. Квадратичні форми, критерій Сильвестра. Перетворення рівняння кривої при перетворенні координат

КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Визначення. *Квадратичною формою* n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що приймають числові значення, називається сума всіляких парних добутків $x_i x_j$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$):

$$L(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

де a_{ij} – *коефіцієнти квадратичної форми*, тобто деякі числа, серед яких хоча б одне відмінно від нуля.

Квадратичні форми з дійсними коефіцієнтами називаються *дійсними*.

Квадратичну форму можна записати в такому вигляді, щоб коефіцієнти при $x_i x_j$ і $x_j x_i$ ($i \neq j$) були рівні між собою. Дійсно, так як $x_i x_j = x_j x_i$, то

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij} + a_{ji})x_ix_j = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})x_ix_j + \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})x_jx_i$$

Надалі будемо вважати, що в квадратичній формі $a_{ij} = a_{ji}$. З коефіцієнтів квадратичної

форми складемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. В силу рівності $a_{ij} = a_{ji}$, в матриці A

рівні між собою елементи, розташовані симетрично щодо головної діагоналі. Матриця, у якій рівні елементи, розташовані симетрично щодо головної діагоналі, називається *симетричною*.

Для того щоб матриця була симетричною, необхідно і достатньо, щоб $A^T = A$, де A^T – матриця, транспонована до матриці A . Будь-якої квадратичної форми відповідає єдина симетрична матриця. Будь-якій симетричній матриці відповідає єдина квадратична форма з точністю до позначення змінних.

Симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ складену з коефіцієнтів квадратичної

форми, будемо називати **матрицею цієї квадратичної форми**. Зауважимо, що дійсній квадратичній формі відповідає матриця з дійсними елементами.

Рангом квадратичної форми називається ранг її матриці. Квадратична форма називається **невиродженою**, якщо її матриця не вироджена. Очевидно, що ранг не виродженої квадратичної форми дорівнює числу змінних цієї форми.

Так як квадратичні форми є функцією n незалежних змінних з однією і тією ж областю визначення, то дві квадратичні форми $L_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $L_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові матриці.

Матриця A квадратичної форми $L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ узгоджена зі стовпцевою

матрицею $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Добуток AX є стовпцевою матрицею розміру $n \times 1$. Матриця

$X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ узгоджена з матрицею AX . Добуток $X^T AX$ представляє матрицю першого порядку, єдиний елемент якої дорівнює $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, тобто даній квадратичній формі.

Таким чином, вираз $X^T AX$ представляє **матричний запис квадратичної форми**: $X^T AX = L(x_1, \dots, x_n)$. Зауважимо, що вираз $X^T AX$ є матричним записом квадратичної форми і в тому випадку, коли A – несиметрична матриця. Однак в цьому випадку A не є матрицею квадратичної форми.

Визначення. Квадратична форма $L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ називається **канонічною**

(інакше кажучи, має **канонічний вигляд**), якщо всі $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ і має вигляд

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2, \text{ а її матриця є діагональною.}$$

Зауваження. Будь-яка квадратична форма однієї змінної є канонічною.

Визначення. Канонічна форма називається **нормальною**, якщо кожен її коефіцієнт, відмінний від нуля, за абсолютною величиною дорівнює одиниці.

Визначення. Дві квадратичні форми називаються **конгруентними**, якщо існує не вироджене лінійне однорідне перетворення, що переводить одну з них в іншу.

Визначення. Знаходження за даною квадратичною формою конгруентної їй канонічної квадратичної форми називається **приведенням квадратичної форми до канонічного вигляду**.

Теорема. Для будь-якої квадратичної форми існує конгруентна їй канонічна квадратична форма.

ЗНАКОВИЗНАЧЕННІ КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Сукупність значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ назовемо **нульовою**, якщо $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, і **ненульовою**, якщо серед значень є хоча б одна змінна, відмінна від нуля.

Очевидно, що для будь-якої квадратичної форми $L(x_1, \dots, x_n)$ маємо $L(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Визначення. Квадратична форма $L(x_1, \dots, x_n)$ називається **додатньо визначеною**, якщо для будь-якої ненульової сукупності значень змінних $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ маємо $L(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) > 0$, і **від'ємно визначеною**, якщо для будь-якої ненульової сукупності значень змінних $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ маємо $L(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) < 0$.

Додатньо і від'ємно визначені квадратичні форми називаються **знаковизначеними**.

Теорема 1. Якщо квадратична форма додатньо визначена, то будь-яка конгруентна їй квадратична форма також є додатньо визначеною.

Теорема 2. Якщо квадратична форма від'ємно визначена, то будь-яка конгруентна їй квадратична форма також є від'ємно визначеною.

Теорема 3. Знаковизначена квадратична форма є невиродженою.

Критерії знаковизначеності квадратичних форм:

У багатьох випадках необхідно з'ясувати, чи є квадратична форма знаковизначеною. Наведемо ряд теорем (без доказів), що виражають критерії знаковизначеності квадратичних форм:

Теорема 1. Для того щоб канонічна квадратична форма була додатньо (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі її коефіцієнти були додатні (від'ємні).

Теорема 2. Якщо квадратична форма додатньо визначена, то визначник її матриці додатній.

Теорема 3. Якщо квадратична форма n змінних від'ємно визначена, то при парному n визначник її матриці додатній, а при непарному – від'ємний.

Теорема 4. Якщо квадратична форма знаковизначена, то всі головні мінори її матриці відмінні від нуля.

Теорема 5. (критерій Сильвестра). Для того щоб квадратична форма була додатньо визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці цієї форми були додатні. Для того щоб квадратична форма була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб головні мінори парного порядку матриці цієї форми були додатні, а непарного – від'ємні.

Доведення. Необхідність. Нехай $L(x_1, \dots, x_n)$ – знаковизначена квадратична форма. Тоді, на підставі теореми 4, всі головні мінори матриці A даної квадратичної форми відмінні від нуля і, отже, $L(x_1, \dots, x_n)$ методом Якобі приводиться до канонічного вигляду $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$, де

$$\lambda_i \ (i=1, \dots, n) \text{ визначаються за формулами: } \lambda_1 = \Delta_1, \ \lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \ j=2, \dots, n.$$

Якщо $L(x_1, \dots, x_n)$ – додатньо визначена квадратична форма, то $\lambda_i > 0$, $(i=1, \dots, n)$, і отже, всі головні мінори матриці A додатні.

Якщо $L(x_1, \dots, x_n)$ – від’ємно визначена квадратична форма, то $\lambda_i < 0$, $(i=1, \dots, n)$, і отже, отримуємо: $\Delta_1 = \lambda_1 < 0$, і $\Delta_2 = \lambda_2 \Delta_1 > 0$ і т. д.

Достатність. Нехай всі головні мінори матриці A додатні, тобто $\Delta_i > 0$, $(i=1, \dots, n)$. Тоді, з формул $\lambda_1 = \Delta_1$, $\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$, $j=2, \dots, n$ випливає, що $\lambda_i > 0$, $(i=1, \dots, n)$, тобто дана квадратична форма додатньо визначена.

Нехай $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ і т. д. Тоді з тих же формул маємо, що $\lambda_i < 0$, $(i=1, \dots, n)$, тобто дана квадратична форма від’ємно-визначена. ▲

ОРТОГОНАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЩО ПРИЗВОДИТЬ КВАДРАТИЧНУ ФОРМУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

За допомогою невиворненого лінійного однорідного перетворення будь-яку дійсну квадратичну форму можна привести до канонічного виду, аналогічно, дійсну квадратичну форму можна привести до канонічного виду за допомогою ортогонального перетворення. Наведемо ряд теорем:

Теорема. Якщо існує ортогональне перетворення, що приводить дійсну квадратичну форму $L(x_1, \dots, x_n)$ до канонічного вигляду $L(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, то $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – характеристичні числа матриці A квадратичної форми $L(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема. Якщо існує ортогональне перетворення з матрицею C , що приводить дійсну квадратичну форму $L(x_1, \dots, x_n)$ з матрицею A до канонічного вигляду $L(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, то стовпчиками матриці C є власні вектор-стовпчики матриці A з власними числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Теорема. Для будь-якої дійсної квадратичної форми існує ортогональне перетворення, що приводить її до канонічного вигляду.

З теорем випливає наступне правило знаходження ортогонального перетворення, що приводить квадратичну форму n змінних до канонічного вигляду:

1. Записуємо матрицю A даної квадратичної форми і знаходимо характеристичні числа цієї матриці.
2. Знаходимо ортонормовану систему власних вектор-стовпців матриці A .

3. Складаємо шукане ортогональне перетворення.

СПРОЩЕННЯ РІВНЯНЬ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Якщо x і y – координати довільної точки на площині в даній системі координат, то, як відомо,

- (I) рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ визначає еліпс;
- (II) рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – точку;
- (III) рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – порожню множину точок (уявний еліпс)
- (IV) рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ – гіперболу,
- (V) рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пару пересічних прямих;
- (VI) рівняння $y^2 = 2px$ ($x^2 = 2py$), $p \neq 0$ – параболу;
- (VII) рівняння $y^2 = a^2$ ($x^2 = a^2$), $a \neq 0$ – пару паралельних прямих;
- (VIII) рівняння $y^2 = 0$ ($x^2 = 0$) – пару прямих, що злилися;
- (IX) рівняння $y^2 = -a^2$ ($x^2 = -a^2$), $a \neq 0$ – порожня множина точок.

Рівняння (I) – (IX) називаються **канонічними рівняннями кривих другого порядку на площині**. Рівняння (I) – (III) визначають криву еліптичного типу, рівняння (IV), (V) – гіперболічного типу, рівняння (VI) – (IX) – параболічного типу.

Розглянемо рівняння другого порядку

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ де } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \quad (4.2.1)$$

Множина точок площини, координати x, y яких задовольняють даному рівнянню, утворює деяку криву. Покажемо, що це рівняння визначає одну з кривих (I) – (IX). Для цього знайдемо рівняння кривої у системі координат $(O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$; де вектори $\vec{e}'_1$ і $\vec{e}'_2$ отримані з

векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ ортогональним перетворенням з матрицею $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$, тобто

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 \end{cases}. \text{ При цьому формули перетворення координат точок матимуть вигляд}$$

$$\begin{cases} x = t_{11}x' + t_{12}y' \\ y = t_{21}x' + t_{22}y' \end{cases}. \text{ Підставивши ці значення } x \text{ і } y \text{ в рівняння (4.2.1), отримаємо рівняння}$$

даної кривої в системі координат $(O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$.

Сума перших трьох членів $ax^2 + bxy + cy^2$ є квадратичною формою двох змінних x, y , яку ми будемо називати **квадратичною формою, відповідною до рівняння** $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + dy + f = 0$.

Матриця цієї форми має вигляд $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$.

Нехай перетворення призводить квадратичну форму $ax^2 + bxy + cy^2$ до канонічного вигляду (як відомо, таке перетворення завжди існує) $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, де λ_1 і λ_2 – коріння характеристичного рівняння матриці A . Отже, рівняння набуде вигляду:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + g_1 y' + f = 0, \quad (4.2.2)$$

де $d_1 = t_{11}d + t_{21}g$, $g_1 = t_{12}d + t_{22}g$. Тоді, можливі такі випадки:

1. $\det A > 0$. Так як визначник матриці квадратичної форми не змінюється при ортогональному перетворенні, то $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, тобто λ_1 і λ_2 мають однакові знаки.

У рівнянні $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + g_1 y' + f = 0$ доповнюємо до повного квадрата члени, що містять x'^2 і x' , а також члени, що містять y'^2 і y' . Після цього, рівняння можна записати так:

$$\lambda_1 (x' - h_1)^2 + \lambda_2 (y' - h_2)^2 = f_1 \quad (4.3.3)$$

Здійснимо паралельний перенос репера $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ на вектор OO' , координатами якого у репері $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ є h_1 і h_2 , тобто на вектор $OO' = h_1 \vec{e}_1' + h_2 \vec{e}_2'$. Тоді рівняння (4.2.3) у репері $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ набуде вигляду $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = f_1$. Якщо $f_1 \neq 0$ рівняння приводиться до виду (I) або (III), якщо $f_1 = 0$ – до виду (II).

2. $\det A < 0$, отже, і $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, λ_1 і λ_2 – різних знаків. Як і в першому випадку, рівняння $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + g_1 y' + f = 0$ можна привести до виду $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = f_1$, тоді, якщо $f_1 \neq 0$, рівняння приводиться до вигляду (IV), якщо $f_1 = 0$ – до виду (V).

3. $\det A = 0$, отже, $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, тобто одне з чисел λ_1 , λ_2 дорівнює нулю. Не порушуючи спільності, будемо вважати, що $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Доповнюючи в рівнянні (4.2.2) члени, що містять x'^2 і x' до повного квадрата, отримаємо:

$$\lambda_1 (x' - h_1)^2 + g_1 y' + f_1 = 0.$$

Тоді 1) $g_1 \neq 0$, то рівняння можна записати у вигляді $\lambda_1 (x' - h_1)^2 = -g_1 (y' - h_2)$. Здійснимо паралельний перенос репера $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ на вектор $OO' = h_1 \vec{e}_1' + h_2 \vec{e}_2'$, тоді отримане

рівняння у репері $(O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ набуде вигляду $\lambda_1 x''^2 = -g_1 y''$. Це рівняння приводиться до вигляду (VI).

2) $g_1 = 0$, то рівняння має вигляд $\lambda_1 (x' - h_1)^2 + f_1 = 0$. Здійснивши паралельний перенос репера $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ на вектор $OO' = h_1 \vec{e}_1'$, отримаємо у репері $(O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ рівняння $\lambda_1 x''^2 + f_1 = 0$. Це рівняння при $f_1 \neq 0$ приводиться до вигляду (VII) або (IX), при $f_1 = 0$ – до виду (VIII).

Отже, якщо $\det A > 0$ то рівняння (1) визначає криву еліптичного типу; якщо $\det A < 0$ – гіперболічного; якщо $\det A = 0$ – параболічного типу.

Операція переходу від рівняння $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ до рівняння $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + g_1 y' + f = 0$ називається **віднесенням кривої до головних осей**. Якщо крива, яка визначається рівнянням (4.2.1), є еліпсом або гіперболою, то нові осі координат паралельні осям симетрії кривої.

Рівняння (4.2.1) у випадку $\det A \neq 0$ визначає криву, яка називається **центральною**. Якщо $\det A = 0$, то крива, яка визначається рівнянням (4.2.1), називається **нецентральною**. До центральних відносяться криві еліптичного і гіперболічного типів, до нецентральных – параболічного типу.

Головними напрямками кривої, заданої рівнянням (4.2.1), назовемо напрямки ортогональних власних векторів матриці квадратичної форми, що відповідає рівнянню.

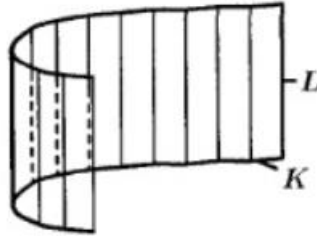
Зі сказаного вище випливає, що існує декартова прямокутна система координат, в якій рівняння (4.2.1) приймає канонічний вигляд. Щоб знайти цю систему координат, чинимо так:

1. Знаходимо ортогональне перетворення, що приводить квадратичну форму, яка відповідає певному рівнянню, до канонічного вигляду.
2. З цього перетворення знаходимо головні напрямки кривої, тобто вектори $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ – ортонормовані власні вектори матриці квадратичної форми, яка відповідає цьому рівнянню.
3. Знаходимо рівняння даної кривої у репері $(O; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$.
4. В отриманому рівнянні робимо доповнення до повних квадратів так, як це було зазначено вище. Знаходимо координати точки O' , яка є початком шуканої системи координат. У знайденій системі координат $(O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ дана крива має канонічний вигляд.

[Тема 4.3 Канонічні рівняння поверхонь другого порядку: еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, циліндри і конуси. Перетин поверхонь другого порядку з площиною](#)

ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ

Визначення. Поверхня, утворена рухом прямої L , яка переміщується у просторі, зберігаючи постійний напрямок і перетинаючи кожен раз деяку криву K , називається **циліндричною поверхнею** або **циліндром**. При цьому крива K називається **напрямною циліндра**, а пряма L – його **твірною** (див. мал. 4.3.1).



Мал. 4.3.1

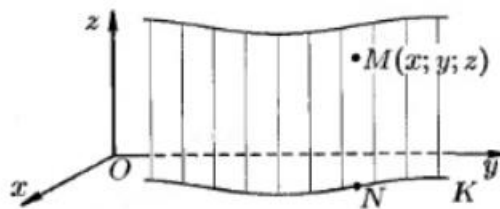
Будемо розглядати циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, яка перпендикулярна цій площині.

Нехай у площині Oxy лежить деяка лінія K , рівняння якої $F(x, y) = 0$. Побудуємо циліндр з твірними, що паралельні осі Oz і напрямною K .

Теорема. Рівняння циліндра, що твірні якого паралельні осі Oz , має вигляд $F(x, y) = 0$, тобто не містить координати z .

Доведення. Візьмемо на циліндрі будь-яку точку $M(x, y, z)$ (див. мал. 4.3.2). Вона лежить на якійсь твірній. Нехай N – точка перетину цієї твірної з площиною Oxy . Отже, точка N лежить на кривій K і її координати задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$. Але точка M має такі ж абсцису x і ординату y , що і точка N .

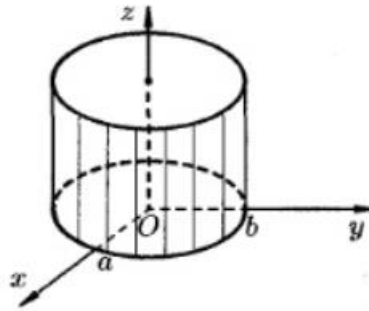
Отже, рівняння $F(x, y) = 0$ задовольняє і координати точки $M(x, y, z)$, так як воно не містить z . І так як M – це будь-яка точка циліндра, то рівняння $F(x, y) = 0$ і буде рівнянням цього циліндру, що й треба було довести. ▲



Мал. 4.3.2

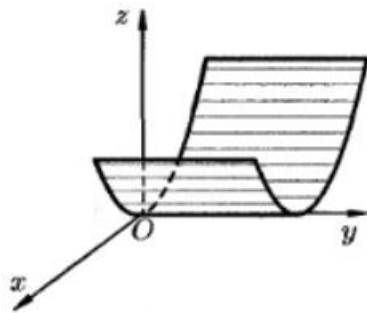
Отже, $F(x, z) = 0$ є рівняння циліндра з твірною, що паралельна осі Oy , а $F(y, z) = 0$ – з твірною, що паралельна осі Ox . Назва циліндра визначається назвою напрямної.

Визначення. Циліндрична поверхня називається **еліптичним циліндром**, якщо напрямною служить еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у площині Oxy (див. мал. 4.3.3).

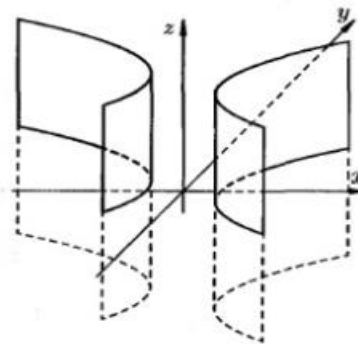


Мал. 4.3.3.

Окремим випадком еліптичного циліндра є **круговий циліндр**, його рівняння $x^2 + y^2 = R^2$. Рівняння $x^2 = 2pz$ визначає у просторі **параболічний циліндр** (див. мал. 4.3.4).



Мал. 4.3.4



Мал. 4.3.5

Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ визначає у просторі **гіперболічний циліндр** (див. мал. 4.3.5).

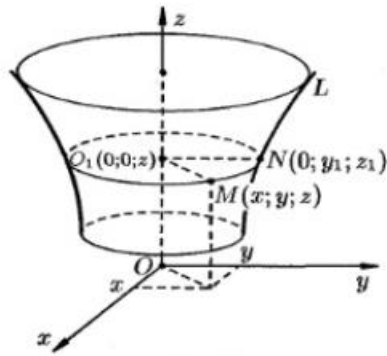
Всі ці поверхні називаються **циліндрами другого порядку**, так як їх рівняння є рівняння другого степеня щодо поточних координат x , y і z .

ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. КОНІЧНІ ПОВЕРХНІ

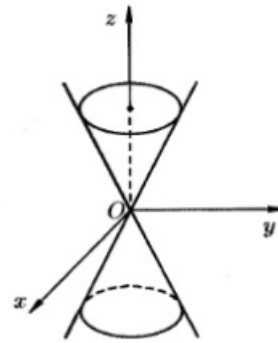
Визначення. Поверхня, утворена обертанням деякої плоскої кривої навколо осі, що лежить в її площині, називається **поверхнею обертання**. Нехай деяка крива L лежить у площині Oyz . Рівняння цієї кривої запишуться у вигляді

$$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Знайдемо рівняння поверхні, що утворена обертанням кривої L навколо осі Oz .



Мал. 4.3.6



Мал. 4.3.7

Візьмемо на поверхні довільну точку $M(x, y, z)$ (див. мал. 4.3.6). Проведемо через точку M площину, перпендикулярну осі Oz , і позначимо точки перетину її з віссю Oz і кривої L відповідно через O_1 і N . Позначимо координати точки N через $(0, y_1, z_1)$. Відрізки O_1M і O_1N є радіусами одного й того ж кола. Тому $O_1M = O_1N$. Але $O_1M = \sqrt{x^2 + y^2}$, $O_1N = |y_1|$. Отже, $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ або $y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$. Крім того, очевидно, що $z_1 = z$. Так як точка N лежить на кривій L , то її координати задовольняють рівнянню (4.3.1). Отже, $F(y_1, z_1) = 0$. Виключаючи допоміжні координати y_1 і z_1 точки N , приходимо до рівняння

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0 \quad (4.3.2)$$

Рівняння (4.3.2) – шукане рівняння поверхні обертання, якому задовольняють координати будь-якої точки M цієї поверхні і не задовольняють координати точок, які не лежать на поверхні обертання. Як видно, рівняння (4.3.2) виходить з (4.3.1) простою заміною y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, координата z зберігається.

Зрозуміло, що якщо крива (4.3.1) обертається навколо осі Oy , то рівняння поверхні обертання має вигляд $F(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$, якщо крива лежить у площині Oxy ($z = 0$) і її рівняння $F(x, y) = 0$, то рівняння поверхні обертання, яка утворена обертанням кривої навколо осі Ox , є $F(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$.

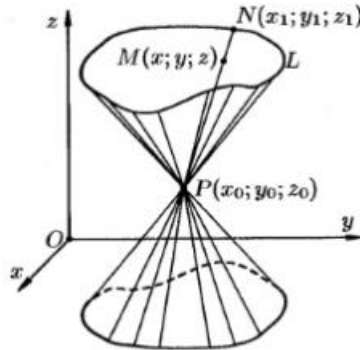
Так, наприклад, обертаючи пряму $y = z$ навколо осі Oz (див. мал. 4.3.7), отримаємо **поверхню обертання** (її рівняння $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$ або $x^2 + y^2 = z^2$). Вона називається **конусом другого порядку**.

Визначення. Поверхня, утворена прямими лініями, що проходять через дану точку P і перетинають дану плоску лінію L (що не проходить через P), називається **конічною поверхнею** або **конусом**. При цьому лінія L називається **напрямною** конуса, точка P – її **вершиною**, а пряма, що описує поверхню, називається **твірною**.

Нехай напрямна L задана рівняннями

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

а точка $P(x_0, y_0, z_0)$ – вершина конуса. Знайдемо рівняння конуса.



Мал. 4.3.8

Візьмемо на поверхні конуса довільну точку $M(x, y, z)$ (див. мал. 4.3.8). Твірна, що проходить через точки P і M , перетне напрямну L в деякій точці $N(x_1, y_1, z_1)$. Координати точки N задовольняють рівнянням (4.3.3) напрямної:

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ F_2(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Канонічні рівняння твірних, що проходять через точки P і N , мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (4.3.5)$$

Виключаючи x_1 , y_1 і z_1 з рівнянь (4.3.4) і (4.3.5), отримаємо рівняння конічної поверхні, яке зв'язує поточні координати x , y і z .

КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

По заданому рівнянню поверхні другого порядку (тобто поверхні, рівняння якої в прямокутній системі координат є алгебраїчним рівнянням другого степеня) будемо визначати її геометричний вид.

Для цього застосуємо так званий **метод перерізів**: дослідження виду поверхні будемо проводити за допомогою вивчення ліній перетину даної поверхні з координатними площинами або площинами, що їм паралельні.

ЕЛІПСОЇД

Досліджуємо поверхню, задану рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.3.6)$$

Розглянемо переріз поверхні (4.3.6) з площинами, паралельними площині xOy . Рівняння таких площин: $z = h$, де h – будь-яке число. Лінія, що отримується в перерізі, визначається двома рівняннями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Досліджуємо рівняння (4.3.7):

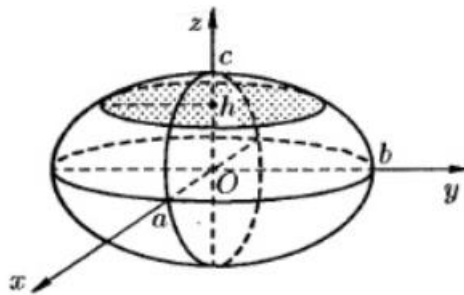
а) Якщо $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. Точок перетину поверхні (4.3.6) з площинами $z = h$ не існує.

б) Якщо $|h| = c$ тобто $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Лінія перетину (4.3.7) вироджується в дві точки $(0, 0, c)$ і $(0, 0, -c)$. Площини $z = c$ і $z = -c$ дотикаються даної поверхні.

в) Якщо $|h| < c$, то рівняння (4.3.7) можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

Як видно, лінія перетину є еліпс з півосьми (див. мал. 4.3.9) $a_1 = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ і $b_1 = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.



Мал. 4.3.9

При цьому чим менше $|h|$, тим більше піввісь a_1 і b_1 . При $h = 0$ вони досягають своїх

найбільших значень: $a_1 = a$, $b_1 = b$. Рівняння (4.3.7) приймуть вигляд
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ h = 0 \end{cases}$$

Аналогічні результати отримаємо, якщо розглянемо переріз поверхні (4.3.6) площинами $x = h$ і $y = h$.

Таким чином, розглянуті перерізи дають змогу зобразити поверхню (4.3.6) як замкнену овальну поверхню. Поверхня (4.3.6) називається **еліпсоїдом**. Величини a , b і c називаються **півосями** еліпсоїда. Якщо всі вони різні, то еліпсоїд називається **тривісним**; якщо будь-які дві півосі рівні, тривісний еліпсоїд перетворюється в **еліпсоїд обертання**; якщо $a = b = c$, то – в **сферу** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

ОДНОПОЛОСНИЙ ГІПЕРБОЛОЇД

Досліджуємо поверхню, задану рівнянням

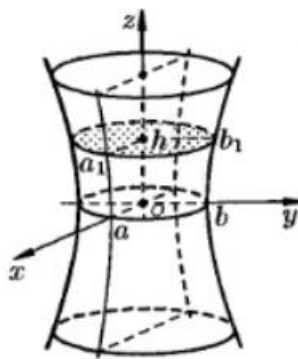
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.3.8)$$

Перетинаючи поверхню (4.3.8) площиною $z = h$, отримаємо лінію перетину, рівняння якої мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = h \end{cases}.$$

Як видно, цією лінією є еліпс з півосями $a_1 = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ і $b_1 = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$.

Напівосі a_1 і b_1 досягають свого найменшого значення при $h=0$: $a_1 = a, b_1 = b$. При зростанні $|h|$ піввісь еліпса будуть збільшуватися. Якщо перетинати поверхню (4.3.8) площинами $x = h$ або $y = h$, то в перерізі отримаємо гіперболи.



Мал. 4.3.10

Знайдемо, наприклад, лінію перетину поверхні (4.3.8) з площиною Oyz , рівняння якої $x = 0$. Ця лінія перетину описується рівняннями
$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$
.

гіпербола (див. мал. 4.3.10).

Аналіз цих перерізів показує, що поверхня, яка визначається рівнянням (4.3.8), має форму нескінченної трубки, що розширюється. Поверхня (4.3.8) називається **однополосним гіперболоїдом**.

ДВУПОЛОСНИЙ ГІПЕРБОЛОЇД

Нехай поверхня задана рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (4.3.9)$$

Якщо поверхню (4.3.9) перетнути площинами $z = h$, то лінія перетину визначається рівняннями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h \end{cases} \quad (4.3.10)$$

Звідси маємо що:

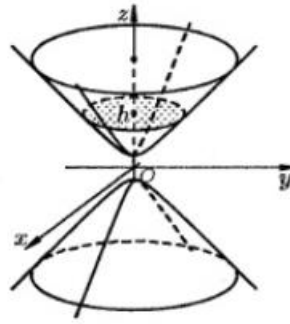
- а) якщо $|h| < c$, то площини $z = h$ не перетинають поверхні;
- б) якщо $|h| = c$, то площини $z = \pm c$ дотикаються даної поверхні відповідно у точках $(0, 0, c)$ і $(0, 0, -c)$.
- в) якщо $|h| > c$, то рівняння (4.3.10) можуть бути переписані так:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} = 1 \\ z = h \end{cases}.$$

Ці рівняння визначають еліпс, піввісі якого зростають з ростом $|h|$.

Перетинаючи поверхню (4.3.9) координатними площинами Oyz $x = 0$ і Oxz $y = 0$, отримаємо в перетині гіперболи, рівняння яких відповідно мають вигляд $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ і

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Мал. 4.3.11

У обох гіпербол дійсною віссю є вісь Oz . Метод перетину дозволяє зобразити поверхню (див. мал. 4.3.11), яка визначається рівнянням (4.3.9), як поверхню, що складається з двох порожнин, що мають форму опуклих необмежених чаш. Поверхня (4.3.9) називається *двуполостной гіперболоїдом*.

ЕЛІПТИЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД

Досліджуємо поверхню, задану рівнянням

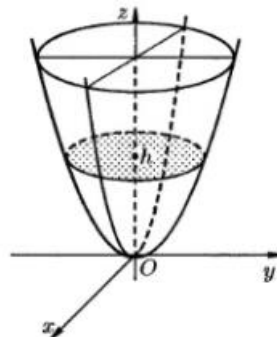
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (4.3.11)$$

Де $p > 0$, $q > 0$. Площинами $z = h$ зробимо переіз поверхні (4.3.11). У перерізі отримаємо

лінію, рівняння якої є $\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases}$. Якщо $h < 0$, то площини $z = h$ поверхні не перетинають; якщо $h = 0$, то площина $z = 0$ дотикається до поверхні в точці $(0, 0, 0)$; якщо

$h > 0$, то в перерізі маємо еліпс, рівняння якого має вигляд $\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases}$. Його піввісь

зростають з ростом h .



Мал. 4.3.12

При перетині поверхні (4.3.11) координатними площинами Oxz і Oyz вийдуть відповідно параболи $z = \frac{x^2}{2p}$ і $z = \frac{y^2}{2q}$. Таким чином, поверхня, яка визначається рівнянням (4.3.11), має вигляд випуклої чашки, що нескінченно розширюється (див. мал. 4.3.12). Поверхня (4.3.11) називається *еліптичним параболоїдом*.

ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД

Досліджуємо поверхню, яка визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (4.3.12)$$

де $p > 0$, $q > 0$. Площинами $z = h$ зробимо переізи поверхні (4.3.12). Одержимо криву

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases}, \text{ яка при всіх значеннях } h \neq 0 \text{ є гіперболою. При } h > 0 \text{ її справжні осі}$$

паралельні осі Ox ; при $h < 0$ – паралельні осі Oy , при $h = 0$ лінія перетину $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$

розпадається на пару пересічних прямих $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ і $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$. При перетині

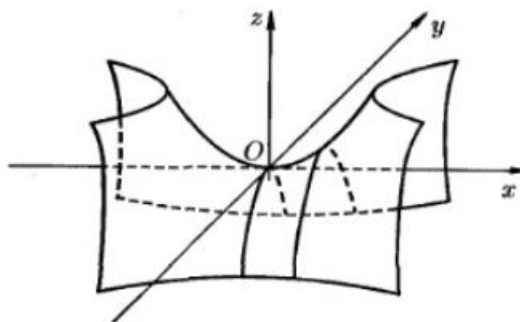
поверхні площинами, паралельними площині Oxz ($y = h$), будемо отримувати параболи

$$\begin{cases} x^2 = 2p \left(z + \frac{h^2}{2q} \right) \\ y = h \end{cases} \text{ гілки яких направлені вгору. При } y = 0 \text{ в перерізі виходить парабола}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}, \text{ з вершиною у початку координат і віссю симетрії } Oz. \text{ Перетинаючи поверхню}$$

(4.3.12) площинами $x = h$, отримаємо параболи $y^2 = -2q \left(z - \frac{h^2}{2p} \right)$, гілки яких направлені

вниз.



Мал. 4.3.13

Аналіз лінії перетину дозволяє визначити вид поверхні: вона має вигляд сідла (див. мал. 4.3.13). Поверхня (4.3.12) називається *гіперболічним параболоїдом*.

КОНУС ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Досліджуємо рівняння поверхні

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (4.3.13)$$

Площинами $z = h$ зробимо переіз поверхні (4.3.13). Лінія перетину $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$, $z = h$.

При $h = 0$ вона вироджується в точку $(0;0;0)$. При $h \neq 0$ в перетині будемо отримувати

еліпси $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 h^2} + \frac{y^2}{b^2 h^2} = 1 \\ \frac{z}{c} = \frac{h}{c} \end{cases}$. Напівосі цих еліпсів зростатимуть при зростанні $|h|$. Площинами

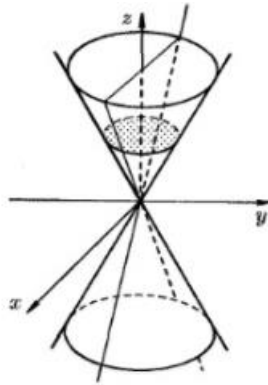
Oyz ($x = 0$) зробимо переіз поверхні (4.3.13). Вийде лінія $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, що розпадається

на дві пересічні прямі $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$ і $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$.

При перетині поверхні (4.3.13) площиною $y = 0$ отримаємо лінію $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, яка також

розпадається на дві пересічні прямі $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$ і $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$.

Поверхня, яка визначається рівнянням (4.3.13), називається **конусом другого порядку**, має вигляд, зображений на малюнку 4.3.14. Поверхні, складені з прямих ліній, називаються **лінійчати**.



Мал. 4.3.14

Такими поверхнями є циліндричні, конічні поверхні, а також однополосний гіперболоїд і гіперболічний параболоїд.

Розділ 3 Множини та функції, границя, неперервність

3.1 Множини і відображення

Позначення:

Квантори $\forall$ - кожної («усі»)
 $\exists$ - існує (знайдеться)
 $\Rightarrow$ - впливає
 $\Leftrightarrow$ - рівносильно або еквівалентно
 $a \in A$ - « a » належить « A »
 $B \subset A$ - « B » входить у « A » або « B » - підмножину « A »
 $\wedge$ - «і»
 $\vee$ - «або»
 $(\bar{a})$ - заперечення

Множина – основне (невизначуване) математичне поняття, еквівалентна поняттям «клас», «сукупність» і т.п.

Позначення:

$a \in A$ - a належить множині A (або a – елемент множини A);
 $b \notin A$ (або $b \bar{\in} A$) - b не належить множині A .

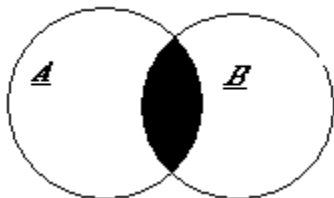
Def

B називається **підмножиною** A (позначається як $B \subset A$), якщо $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$.

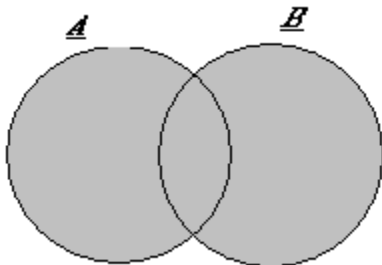
$\emptyset$ - порожня множина.

Def

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ - **перетин**



$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ - **об'єднання**



Def

Прямим добутком називається множина упорядкованих пар:

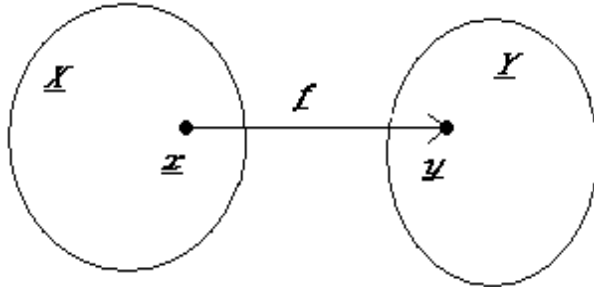
$$A \times B = \{(a; b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Функції або відображення

Def

Нехай X і Y - множини.

Будемо говорити, що на множині X задана функція (відображення) f зі значеннями в множині Y , якщо $\forall x \in X \quad \exists! y \in Y : y = f(x)$.



x - або аргумент **незалежна змінна**

y - **значення** функції або **залежна змінна**

$D_f = X$ - **область визначення**

$E_f = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$ - **область значень**

$E_f \subset Y$ (але не зобов'язана збігатися)

Якщо $A \subset X$, то $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\}$ - **образ** множини A .

Якщо $B \subset Y$, то $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ - **прообраз** множини B .

Def Графіком функції f називається множина

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Зауваження

Останнім часом функцію визначають як функціональне відношення, тобто як підмножина в $X \times Y$, що володіє властивістю:

$$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Способи завдання функцій:

1) **Аналітичний**, тобто формулою. Наприклад: $f(x) = x^n$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ і т.п.

(тут під областю визначення розуміється ОДЗ).

2) **Графічний**.

3) **Описовий**. Наприклад $[x]$ - найбільше ціле число, що не перевершує x (намалювати графік).

Класифікація відображень (функцій):

1° f називається **сюр'єкцією (sur)**, якщо $f(X) = Y$;

2° f називається **ін'єкцією (inj)**, якщо $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

3° f називається **бієкцією (bij)**, якщо вона $sur \wedge inj$.

Приклади

1° $f(x) = x^2 \in sur \mathbb{R}$ на $[0; \infty)$.

2° $f(x) = x^2 \in bij [0; \infty)$ на $[0; \infty)$.

3° $f(x) = x^2 \in inj$ (але не sur) $[0; +\infty)$ на $(-\infty; +\infty)$.

Def

Якщо функція $f \in \text{bij } X \text{ на } Y$, то існує обернена функція f^{-1} , областю визначення якої є Y , а областю значень - X , причому

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X : f(x) = y$$

і позначається як

$$x = f^{-1}(y) .$$

Зауваження

Не плутати **позначення оберненої функції** і **прообраз** y .

Приклад:

для $f(x) = x^2$, де $X = [0; +\infty)$, $Y = [0; +\infty)$

звотної буде функція $f^{-1} = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$.

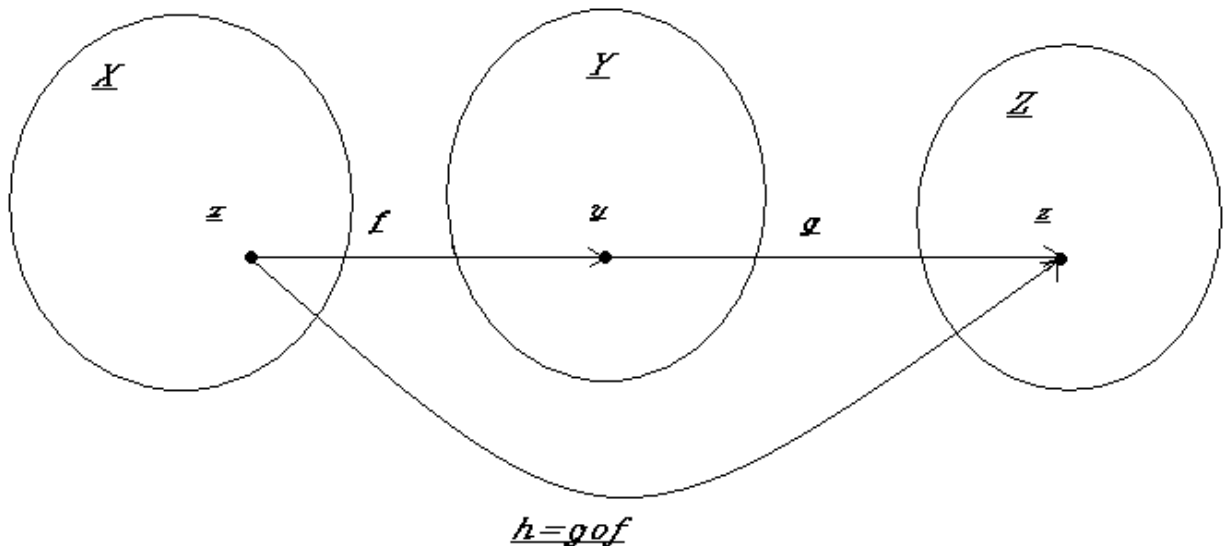
Для випадку 1° с $X = \mathbb{R}$ оберненої функції не існує.

Легко бачити, що $(f^{-1})^{-1} = f$ (довести самостійно).

Суперпозиція

Def

Якщо задані дві функції $f : X \rightarrow Y$ і $g : Y \rightarrow Z$, то суперпозицією (композицією) цих двох функцій називається функція $h = g \circ f$ з областю визначення X и областю значень Z , де $h(x) = g(f(x))$.



Зауваження

Необхідна умова існування **композиції** - $E_f \subset D_g$.

Зауваження

У загальному випадку $f \circ g \neq g \circ f$.

Наприклад, нехай $f(x) = x+1$, $g(y) = y^2$.

Тоді $g \circ f = (x+1)^2$, $f \circ g = x^2 + 1$.

Легко бачити, що $f^{-1} \circ f = e_X \wedge f \circ f^{-1} = e_Y$

(де e_X тотожно відображає множину X на себе).

Справедлива **лема**: Якщо $f: X \rightarrow Y \wedge g: Y \rightarrow X$ задовольняють умові:

$$f \circ g = e_Y \wedge g \circ f = e_X \Leftrightarrow g = f^{-1}.$$

Доказ.

З першого співвідношення випливає, що f - sur, із другого – що g - sur.

З другого співвідношення також випливає, що

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

тобто функція f є **ін'єкцією (inj)**.

Аналогічно, з першого співвідношення випливає, що функція g є **ін'єкцією (inj)**.

Таким чином, функції f і g - **бієкції (bij)**.

Крім того, якщо $y = f(x)$, то $g(y) = x$, тобто $x = f^{-1}(y)$.

Лема доведена.

Асоціативність композиції

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

(довести самостійно)

Обернені тригонометричні функції.

Оскільки тригонометричні функції не є **bij** на всій області визначення, то не існує і обернених функцій.

Але якщо звузити область визначення, розглядаючи відрізки, де ця функція монотонна, то можна визначити обернену функцію.

Def.

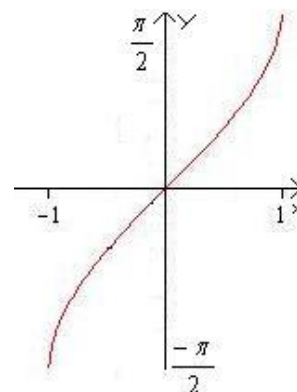
Оберненої до функції $y = \sin x$ з

$$D_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } E_f = [-1; 1]$$

називається функція **arcsin x** з

$$D_{\arcsin} = [-1; 1] \text{ і } E_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Дана функція є непарна і зростаюча.



Def.

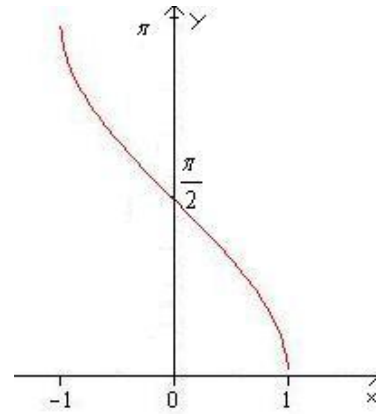
Оберненої до функції $y = \cos x$ з

$$D_f = [0; \pi] \text{ і } E_f = [-1; 1]$$

називається функція **arccos x** с

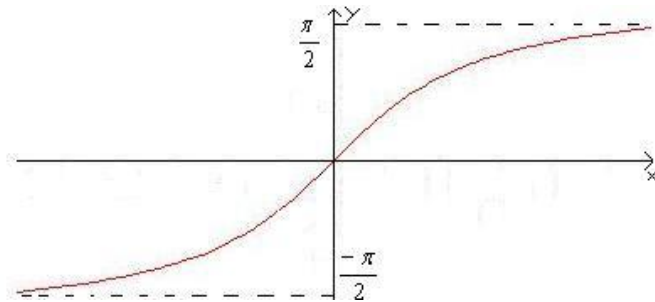
$$D_{\arccos} = [-1; 1] \text{ і } E_{\arccos} = [0; \pi].$$

Дана функція спадає,
але не є ні парна, ні непарна.

**Def.**

Оберненої до функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ з $D_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $E_f = \mathbb{R}$

називається функція **arctg x** с $D_{\arctg} = \mathbb{R}$ і $E_{\arctg} = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

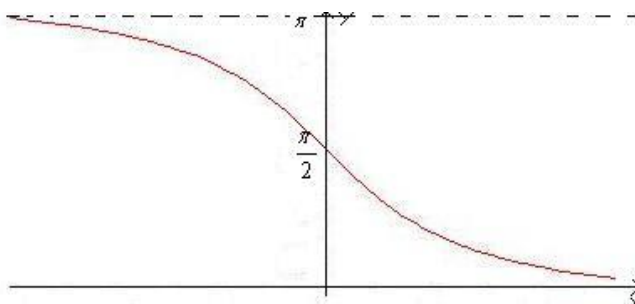


Дана функція є непарна і зростаюча.

Def.

Оберненої до функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$ з $D_f = (0; \pi)$ і $E_f = \mathbb{R}$

називається функція **arcctg x** з $D_{\operatorname{arcctg}} = \mathbb{R}$ і $E_{\operatorname{arcctg}} = (0; \pi)$.



Дана функція спадає.

3.2. Дійсні числа та їх підмножини

Зі шкільного курсу математики відома множина дійсних чисел і їх підмножин:

- множина натуральних чисел $\mathbb{N}$,
- множина цілих чисел $\mathbb{Z}$
- і множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

Def

Множина $A \subset \mathbb{R}$ обмежена **зверху**, якщо $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \Rightarrow a \leq M$.

M - називається верхньою гранню.

Множина $A \subset \mathbb{R}$ обмежена **знизу**, якщо $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \Rightarrow a \geq m$.

m – називається нижньою гранню.

Множина обмежена, якщо воно обмежене зверху й знизу, тобто

$$\exists m, M : \forall a \in A \Rightarrow m \leq a \leq M.$$

Def

Найменша із усіх верхніх граней називається **точною верхньою гранню** або **супремумом**. ($M = \sup A$)

Найбільша із усіх нижніх граней називається **точною нижньою гранню** або **інфімумом**.

$$(m = \inf A)$$

Теорема про існування точної верхньої межі.

У будь-якого непустиого обмеженого **зверху** числової множини $\exists \sup$,

а в будь-якого непустиого обмеженого **знизу** числової множини $\exists \inf$.

Критерій sup: $M = \sup A \Leftrightarrow 1) \forall a \in A \Rightarrow a \leq M$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > M - \varepsilon.$$

Критерій inf: $m = \inf A \Leftrightarrow 1) \forall a \in A \Rightarrow a \geq m$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < m + \varepsilon.$$

Приклад $A = [0; 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$.

Довести, що:

$$\inf A = 0$$

$$\sup A = 1$$

($\min A = 0$, а $\max A$ – не существует)

Властивості супремума й інфімуму:

$$1) A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \wedge \sup A \leq \sup B.$$

$$2) \sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Геометрична інтерпретація дійсних чисел - числова вісь із обраним початком «0» і масштабом.

Модуль $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ - відстань від початку осі

$$|x| = \max \{x; -x\}$$

Властивості: $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$
 $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

Уведемо множини:

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - відрізок або сегмент;

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - інтервал.

Принцип Кантора.

Система вкладених сегментів має непустий переріз $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots$, причому,

якщо $\inf(b_n - a_n) = 0$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c\}$.

Зауваження. Для систем інтервалів – це невірно.

Приклад $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0; \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.

Порівняння числових множин

Def

Позначення: $\mathbb{N}$ - множина **натуральних** чисел;

$\mathbb{Z}$ - множина **цілих** чисел;

$\mathbb{Q}$ - множина **раціональних** чисел.

Def

Множини $A \sim B$ **еквівалентні**, якщо існує взаємо-однозначне відображення A на B .

Так, кінцеві множини еквівалентні, якщо число їх елементів однаково ($\text{card } A = \text{card } B$).

Def

Множина A називається **зліченною**, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел.

Наприклад, множина парних чисел лічильна, тому що $n \leftrightarrow 2n$.

Лема 1 Множина $\mathbb{Z}$ - зліченна.

Доказ:

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

$$Z_n = \begin{cases} n/2 & n = 2k \\ \frac{1-n}{2} & n = 2k-1 \end{cases}$$

Теорема 1 Множина $\mathbb{Q}$ зліченна.

Доказ: Ми обмежимося доказом зліченності множини позитивних раціональних чисел.

$m \setminus n$	1	2	3
1	1/1	1/2	1/3
2	2/1	2/2	2/3
3	3/1	3/2	3/3

Аналогічно доводиться, що об'єднання злічених множин $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ - зліченна.

Теорема 2 Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ - **незліченна**.

3.3. Границя послідовності та її властивості.

Def

Послідовністю називається функція натурального аргументу, тобто відображення з $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$.

Позначимо: x_n, a_n .

Def

Якщо множина $X = \{x_n\}$ обмежена, то і послідовність називається **обмеженою**, тобто $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leq M$.

Необмеженість x_n означає: $\forall M \exists n : |x_n| > M$.

Def

Границею послідовності називається число A , для якого

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$$

або геометрично:

$$\forall U_\varepsilon(A) \exists N \forall n > N_\varepsilon x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Приклад:

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \lim x_n = 0.$$

Властивості границь:

1° **Єдиність:**

Доведемо єдиність границі від протилежного.

Припустимо, що $\exists A \neq B$ - дві границі.

Тоді, узявши $\varepsilon = \frac{|B - A|}{2}$, одержимо:

$$\left. \begin{array}{l} \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon \\ \exists N_2 \quad \forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - B| < \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B) = \emptyset.$$

Твердження доведене.

2° **Обмеженість послідовності, що сходиться:**

Доказ:

$$\varepsilon = 1 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |x_n - A| < 1, \text{ тобто}$$

$$|x_n| < |A| + 1 \text{ при } n > N_1.$$

$$\text{Значить } |x_n| \leq \max \{ |x_1|, \dots, |x_{N_1}|; |A| + 1 \}.$$

Твердження доведене.

Зауваження: зворотне твердження невірне (наприклад $x_n = (-1)^n$).

3° **Арифметичні властивості границь.**

Нехай x_n, y_n - послідовності, що сходяться. Тоді:

$$\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n - \text{границя суми дорівнює сумі границь.}$$

$$\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n - \text{границя добутку дорівнює добутку границь.}$$

Доказ:

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n - x_n B + x_n B - AB| \leq \underbrace{|x_n|}_{< M} \cdot \underbrace{|y_n - B|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|B|}_{< \varepsilon} \cdot \underbrace{|x_n - A|}_{< \varepsilon} < (M + |B|) \varepsilon = \varepsilon_1.$$

Наслідок:

- границя добутку константи на послідовність, що сходиться, дорівнює добутку границі цієї послідовності на дану константу.

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}, \text{ якщо } y_n, B \neq 0 \text{ (довести самостійно).}$$

Def

Послідовність x_n є **нескінченно малою** (н.м.) ($x_n = \bar{0}(1)$), якщо $\lim x_n = 0$.

Наприклад: $\frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}}; (0,5)^n$.

Якщо x_n - сходиться до A , то різниця $(x_n - A)$ - нескінченно мала.

Def

Послідовність x_n є **нескінченно великою** (н.в.), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| > \varepsilon$$

Наприклад: $x_n = n, x_n = \sqrt{n}$ і т. д.

4° **Добуток послідовностей** нескінченно малої на обмежену є нескінченно малим, тобто якщо

x_n - нескінченно мала послідовність

y_n - обмежена послідовність,

то $x_n \cdot y_n$ - бесконечно мале.

5° **Зв'язок н.м. і н.в. послідовностей.**

Якщо x_n - н.в., то $\frac{1}{x_n}$ - н.м.

$$\text{Доказ: } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \Rightarrow |x_n| > \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x_n} \right| < \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon_1.$$

Твердження доведене.

Якщо x_n - н.м., але $\neq 0$, то $\frac{1}{x_n}$ - н.в.

Доказ: (самостійно).

Вправа. Придумати приклад необмеженої послідовності, що **не** є н. в.

Граничний перехід у нерівностях

Теорема 1

Якщо $x_n \geq y_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \wedge \quad \exists \lim x_n = A, \lim y_n = B \Rightarrow A \geq B$.

Доказ:

Розглянемо послідовність $z_n = x_n - y_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Якби $\lim z_n = C < 0$, то, узявши $\varepsilon = \frac{|C|}{2}$, одержимо що $\forall n > N \quad z_n < \frac{C}{2} < 0$, тобто $x_n < y_n$.

Т.о. ми прийшли до протиріччя з заданою умовою.

Теорема доведена.

Теорема 2

Якщо $A = \lim x_n > B = \lim y_n$, то $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad x_n > y_n$.

Теорема 3:

Принцип двосторонньої обмеженості (або теорема «про двох міліціонерів»).

Якщо $\forall n \geq n_0 \quad x_n \leq y_n \leq z_n$ і $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Доказ:

Це випливає з ланцюжка нерівностей

$$-\varepsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon = \max \{n_0, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}.$$

Теорема доведена.

Приклад: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Доказ:

Нехай $a > 1$, тоді $\sqrt[n]{a} - 1 = h_n > 0 \Rightarrow (1 + h_n)^n = a$ (з бінома Ньютона).

По нерівності Бернуллі: $(1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$.

$$\text{Значить } a \geq 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n \leq \frac{a-1}{n} \rightarrow 0.$$

По теоремі «про двох міліціонерів» випливає, що $h_n \rightarrow 0$.

Якщо $0 < a < 1$, то введемо $b = \frac{1}{a} > 1$. Тоді $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.

Твердження доведено.

Вправа.

Довести самостійно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Монотонні і фундаментальні послідовності

Def

Послідовність x_n називається **зростаючою** (і позначається $\uparrow$), якщо для будь-якого натурального n виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$.

Послідовність x_n називається **неспадною** (і позначається $\nearrow$), якщо для будь-якого натурального n виконується нерівність $x_{n+1} \geq x_n$.

Послідовність x_n називається **спадною** (і позначається $\downarrow$), якщо для будь-якого натурального n виконується нерівність $x_{n+1} < x_n$.

Послідовність x_n називається **незростаючою** (і позначається $\searrow$), якщо для будь-якого натурального n виконується нерівність $x_{n+1} \leq x_n$.

Усі ці послідовності називаються **монотонними**.

Теорема Вейерштрасса

Неспадна, обмежена зверху, послідовність збігається, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$.

Незростаюча, обмежена знизу, послідовність збігається, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf x_n$.

Доказ:

Доведемо перше твердження.

Нехай $\sup x_n = M$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M$ і $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 : x_{n_1} > M - \varepsilon$.

Але тоді, у силу неспадання послідовності, $\forall n > n_1 \quad x_n > M - \varepsilon$.

Виходить $\forall n > n_1 \quad x_n > M - \varepsilon$, тобто $M = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, що і було потрібно довести.

Теорема доведена.

Аналогічно доводиться друге твердження.

Зауваження. Попередня теорема справедлива, якщо послідовність **монотонна**, починаючи з деякого номера.

Приклад: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ при $a > 1$.

Доказ:

Розглянемо послідовність $x_n = \frac{n}{a^n}$.

Тому що $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{na} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} < 1$, то, починаючи з деякого номера, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, тобто спадає.

Тому що $x_n > 0$, то, застосувавши теорему Вейерштрасса, одержимо: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$.

Зробивши граничний перехід у рівності $x_{n+1} = \frac{n+1}{na} \cdot x_n$, одержимо $b = \frac{1}{a} b$.

Виходить $b = 0$, тобто *твердження доведене*.

Вправа. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Теорема

Монотонна необмежена послідовність є **нескінченно великою**.

Доказ:

Будемо вважати, що послідовність не спадає.

Тоді $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : x_N > \varepsilon$.

Тоді $\forall n > N \Rightarrow x_n \geq x_N > \varepsilon$.

Значить послідовність x_n нескінченно велика.

Теорема доведена.

Число e

Розглянемо дві послідовності: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ і $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Покажемо, що вони збігаються.

Доведемо спочатку, що $y_n \searrow$.

При $n \geq 2$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Тут ми використовували нерівність Бернуллі.

Отже, $y_{n-1} > y_n > 0$, і по теоремі Вейерштрасса існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

А тому що $x_n = \frac{y_n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Прийнято позначати: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\dots$

Это число часто використовується в математикі.

Вправа. Довести, що послідовність $x_n \nearrow$ і $x_n < 3$.

Def Послідовність x_n називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Критерій Коші (без доказу)

Послідовність x_n **збігається** тоді і тільки тоді, коли вона **фундаментальна**.

Приклад 1: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Доведемо, що ця послідовність **не є фундаментальною**.

Оцінимо $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Виходить $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n > N \quad \exists m = 2n > N: |x_n - x_{2n}| > \varepsilon$,

то послідовність **не фундаментальна**, а значить **розбігається**.

Приклад 2: $x_n = \cos 1 + \frac{\cos 2}{2} + \frac{\cos 3}{2^2} + \dots + \frac{\cos n}{2^{n-1}}$.

Покажемо, що ця послідовність **фундаментальна**.

$$\forall m > n \quad |x_m - x_n| \leq \left| \frac{\cos(n+1)}{2^n} + \dots + \frac{\cos m}{2^{m-1}} \right| \leq \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

при досить великих n .

Часткові границі послідовності

Def

Нехай дана послідовність $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ і деяка зростаюча підпослідовність натуральних чисел $\mathbb{N} \ni n_k \uparrow$.

Тоді послідовність $b_k = a_{n_k}$ називається **підпослідовністю** даної послідовності (тобто проріджується вихідна послідовність).

Границя підпослідовності називається **частковою границею** вихідної послідовності.

Теорема Больцано-Вейерштрасса.

З будь-якої **обмеженої послідовності** $\{x_n\}$ можна виділити **збіжну підпослідовність**.

Доказ.

Нехай $x_n \in [a; b]$. Ділимо відрізок $[a; b]$ навпіл і вибираємо той ділянка, яка містить нескінченне число членів $\{x_n\}$.

Одержимо систему вкладених відрізків, що $[a_n; b_n]$ стягаються, і за принципом

$\exists! c \in [a_n; b_n]$ Кантора. Тоді $\forall U_\varepsilon(c) \exists [a_n; b_n] \subset U_\varepsilon(c)$

Отже, у цьому околі перебуває нескінченне число членів послідовності x_n .

Обравши $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ знайдемо $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(c)$, причому $n_{k+1} > n_k$ й $x_{n_k} \rightarrow c$.

Теорема доведена.

Наслідок.

Будь-яка **обмежена** послідовність має хоча б одну **часткову границю**.

Теорема.

Якщо послідовність **не обмежена зверху**, то $\exists x_{n_k} \rightarrow +\infty$.

Якщо послідовність **не обмежена знизу**, $\exists x_{n_k} \rightarrow -\infty$.

Доказ.

$\forall k \exists x_{n_k} > k$.

Оберемо $x_{n_1} > 1$; $x_{n_2} > x_{n_1} + 1 > 2$; $x_{n_k} > x_{n_{k-1}} + 1 > k \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow +\infty$.

Друге твердження доводиться аналогічно.

Теорема доведена.

Def

Найбільша із часткових границь називається **верхньою границею** й позначається $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Найменша із часткових границь називається **нижньою границею** й позначається $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Теорема.

В обмеженої послідовності існують верхня $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ і нижня $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ границі.

3.4. Границя функції та її властивості

Def I

Точка a є граничною точкою множини X , якщо $\forall U(a)$ існує нескінченна множина точок $x \in U(a) \cap X$.

Def I'

Якщо a є граничною точкою множини X , то

$$X \Leftrightarrow \forall \overset{\circ}{U}(a) = U(a) \setminus \{a\} \Rightarrow U(a) \cap \overset{\circ}{X} \neq \emptyset.$$

Легко бачити еквівалентність цих двох визначень.

Def II

Якщо a є граничною точкою множини X , то $\exists x_n \in X \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a$.

Довести еквівалентність Def I і Def II.

Зауваження 1.

Гранична точка множини значень послідовності $X = \{x_n : n \in N\}$ не завжди збігається із частковою границею послідовності.

Наприклад, у постійної послідовності $x_n = a$ значення a є частковою границею, але $X = \{a\}$ - не має граничних точок.

Зауваження 2.

Гранична точка може не належати вихідній множині.

Def (по Гейне)

Нехай функція $f(x)$ визначена на області визначення D_f і a - гранична точка D_f . Тоді число b називається **границею функції** $f(x)$:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall x_n \in D_f \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$$

Def (по Коші)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall U(b) \exists \overset{\circ}{U}(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(b).$$

Якщо $a, b \in \mathbb{R}$, то це рівносильно наступному вираженню:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D_f : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Якщо $b = \infty$, то функція називається **нескінченно великою** і визначення виглядає так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D_f : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Інші випадки розглянути самостійно.

Теорема. Визначення по Гейне і по Коші еквівалентні.

Властивості границь.

- 1) **Одиничність границі функції.** (Довести самостійно)
- 2) **Арифметичні властивості границь:**

Якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \wedge \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, то

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c \wedge \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c,$$

то границя суми дорівнює сумі границь, а границя добутку дорівнює добутку границь.

Крім цього: $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, якщо $g(x) \neq 0$; $c \neq 0$.

Усі ці властивості випливають із властивостей границь послідовності.

Def

Функція $f(x)$ називається **асимптотически обмеженою** при $x \rightarrow a$

(позначається $f(x) = \underline{O}(1)$), якщо:

$$\exists U(a) \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

3) Якщо існує **кінцева границя** функції $f(x)$, то $f(x) = \underline{O}(1)$.

Доказ:

$$\text{Узявши } \varepsilon = 1 \exists U(a) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - b| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |b| + 1.$$

Твердження доведене.

Зауваження. На всій області визначення функція $f(x)$ **може не бути обмеженою**,

наприклад: $f(x) = \frac{1}{x}$, при $x \rightarrow 1$ $f(x) \rightarrow 1$, але не обмежена.

Def

Функція називається **нескінченно малою** при $x \rightarrow a$ (позначається $f(x) = \bar{O}(1)$), якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

4) **Добуток нескінченний малої на обмежену функцію є нескінченно малою** (довести самостійно).

5) **Зв'язок між нескінченно малою і нескінченно великою.**

Якщо $f(x) = \bar{O}(1) \wedge f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ - нескінченно велика.

Якщо $f(x)$ - нескінченно велика, то $\frac{1}{f(x)}$ - нескінченно мала.

Це випливає з відповідних властивостей послідовностей.

6) **Граничний перехід у нерівностях.**

$$\text{Якщо } \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq g(x) \text{ і } \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Це випливає з відповідної властивості для границі послідовності.

7) **Теорема.** Принцип двосторонньої обмеженості для функцій.

Якщо $\forall x \in U(a): f(x) \leq g(x) \leq h(x) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

Це випливає з відповідної теореми для послідовності.

Приведемо несколько прикладів на використання цих властивостей:

Приклад 1 (границя раціональної функції).

Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ - багаточлени, причому $Q(a) \neq 0$. Тоді $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ по

властивості 2).

Приклад 2

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

8) Теорема. Границя суперпозиції.

Нехай є дві функції $f: X \rightarrow Y$ і $g: Y \rightarrow Z$, а також виконані наступні умови:

1° a - гранична точка множини X , b - гранична точка множини Y .

2° $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \wedge \exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$.

3° $g(b) = c$.

Тоді $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Доказ:

З умови 2° випливає, що $\forall x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) = y_n \rightarrow b$.

При цьому можливі два випадки:

а) Якщо $f(x_n) \neq b$, то $g(y_n) = g(f(x_n)) \rightarrow c$ і твердження доведене.

б) Якщо при деяких n $f(x_n) = b$, то $g(f(x_n)) = g(b) = c$ в силу умови 3°.

Тому $g(f(x_n)) \rightarrow c$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$, що і було потрібно довести.

Однобічні границі функції

Теорема (Критерій Коші)

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U(a) \forall x_1, x_2 \in D_f \cap \overset{\circ}{U}(a) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Доказ

З фундаментальності випливає обмеженість функції $f(x)$ в деякій околі $\overset{\circ}{U}(a)$, а значить, по теоремі Больцано – Вейерштрасса $\exists x_n \rightarrow a: f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$.

Доведемо, що $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U_\delta(a): \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap D_f \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Тоді $|f(x) - b| < |f(x_n) - f(x)| + |f(x_n) - b| < 2\varepsilon$ при $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ і досить великих n .

Теорема доведена.

Def

Правою границею функції $f(x)$ називається $b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f: 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Лівою границею функції $f(x)$ називається $b = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f : -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon .$$

Очевидно, що $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

Ліва границя може не збігатися з правою границею, наприклад: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1$, а

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Монотонні функції

Def

Функція $f(x)$ **зростає** на інтервалі (a, b) (позначається $\uparrow$), якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) ;$$

$f(x)$ **не спадає** ($\nearrow$), якщо $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

$f(x)$ **спадає** ($\searrow$), якщо $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

$f(x)$ **не зростає** ($\searrow$), якщо $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Такі функції називаються **монотонними на інтервалі**.

Якщо функція на одних інтервалах зростає, а на інших – спадає, то вона називається **кусочно-монотонною**, наприклад, $\sin x$.

Теорема Вейерштрасса про монотонну функцію

Монотонна на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ в будь-якій точці має **кінцеві односторонні границі**, тобто $\forall x_0 \in (a, b) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Доказ

Нехай для визначеності $f(x) \nearrow$ (не убыває).

Тоді $\forall x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$, а значить $\exists \sup_{x \in (a; x_0)} f(x) = M$.

Доведемо, що $M = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

За критерієм $\sup \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1 < x_0 : f(x_1) > M - \varepsilon$.

Тоді $\forall x \in (x_1, x_0) \Rightarrow M - \varepsilon < f(x) \leq M$, значить $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = M$.

Аналогічно доводиться, що $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x)$.

Теорема доведена.

Def

Нехай a – гранична точка D_f .

Число b називається **частковою границею** функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо

$$\exists x_n \rightarrow a \wedge x_n \neq a : f(x_n) \rightarrow b.$$

Найбільший з часткових границь називається **верхньою границею** і позначається $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$.

Найменший з часткових границь називається **нижньою границею** і позначається $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$\text{Наприклад } \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1.$$

Зауваження.

Верхні і нижні границі можуть бути нескінченними.

Так $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$, а $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Критерій існування границі: $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$.

Це випливає з визначення границі по Гейне.

Вправа

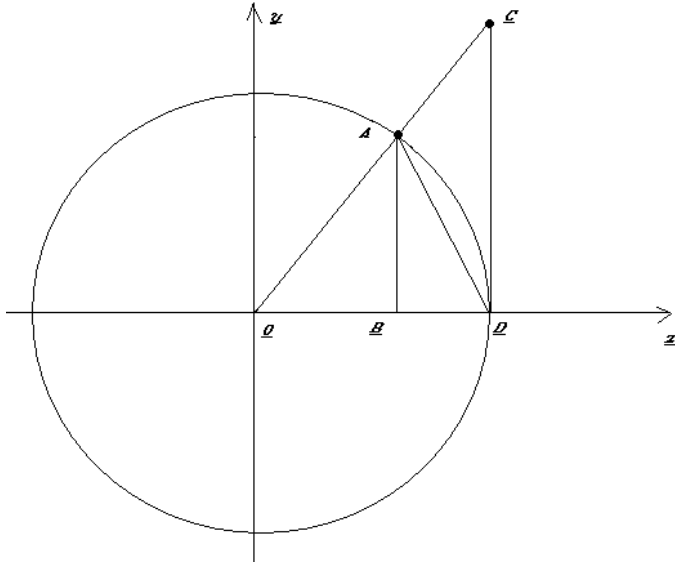
Придумати приклад функції, що мала б три часткових границі при $x \rightarrow a$.

3.5. Перша та друга чудові границі

Перша чудова границя

Теорема $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Доказ



Тому що функція $\frac{\sin x}{x}$ - парна, то досить розглянути $x > 0$.

Скористаємося нерівностями $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, що випливають з геометрії (див. малюнок).

Розглянемо площі трикутників: $S_{OAB} < S_{OAD} < S_{OCD}$.

Ізвестно, що $S_{OAB} = \frac{1}{2} \sin x$; $S_{OAD} = \frac{1}{2} x$; $S_{OCD} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$,

то: $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

Розділивши всі частини нерівності на $\sin x$, одержимо: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Перейдемо до зворотних величин і одержимо: $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Тому що $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, то $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Застосувавши теорему «про двох міліціонерів» до попередніх нерівностей, одержимо

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Що і було потрібно довести.

Наслідки:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Друга чудова границя

Теорема $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Доказ.

Розглянемо спочатку $x > 0$.

Тоді $\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}.$

Але тому що послідовності $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ і $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow e$, то по теоремі «про двох

міліціонерів» $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Розглянемо $x < 0$.

Позначимо $x = -y - 1$, тоді $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{-y-1} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} e.$

Значить $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ і *теорема доведена.*

Другу чудову границю можна записати так: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Наслідок 1

Якщо прологарифмувати функцію $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ і скористатися неперервністю логарифма (це буде доведено пізніше), то одержимо: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1.$

Якщо перейти до іншого підставі, то одержимо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$

Наслідок 2

Позначимо $\ln(1+x) = t$, тоді $x = e^t - 1.$

З наслідку 1 одержуємо: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$ чи $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$

Більш загальний запис: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

Наслідок 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu \ln(1+x)} \cdot \frac{\mu \ln(1+x)}{x} \right) = \mu.$$

Еквівалентні нескінченно малі і нескінченно великі.

Def

Функції $f(x)$ і $g(x)$, нескінченно малі при $x \rightarrow a$ і нерівні 0 у деякій околиці $\overset{\circ}{U}(a)$, називаються **еквівалентними** і позначаються $f(x) \sim g(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Наприклад: $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ і т.п.

Теорема про еквівалентних нескінченно малих

У границі відношення або добутка можна заміняти нескінченно малу функцію на еквівалентну їй нескінченно малу функцію і границя при цьому не зміниться.

Тобто якщо $f(x) \sim f_1(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g(x)}$.

Доказ

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g(x)}$, що і було потрібно довести.

Приклад: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{2^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{x^2 \ln 2} = \frac{4}{\ln 2}$.

Зауваження.

У сумі або різниці цього робити не можна.

Так $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$.

Аналогічно визначимо **еквівалентні нескінченно великі**:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Наприклад: $x^2 + 2x \sin x \sim x^2$.

Для нескінченно великих функцій також справедлива **теорема про заміну в границі частки або добутку** нескінченно великої на еквівалентну їй нескінченно велику функцію.

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x \sin x}{\sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

0 – символика Ландау.

Def

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ - нескінченно малі (чи нескінченно великі) функції при $x \rightarrow a$.

$$f(x) = \bar{O}(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = \alpha(x) g(x),$$

де $\alpha(x)$ - нескінченно мала функція при $x \rightarrow a$.

Якщо $g(x) \neq 0$ в деяком околі $\overset{\circ}{U}(a)$, то це визначення еквівалентне тому, що $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Наприклад: $x^2 = \bar{O}(x)$, але $x = \bar{O}(x^2)$.

Def

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ - нескінченно малі (або нескінченно великі) функції при $x \rightarrow a$.

$$f(x) = \underline{O}(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = \alpha(x) g(x),$$

де $\alpha(x)$ - **обмежена** функція при $x \rightarrow a$.

Якщо $g(x) \neq 0$ в деякій околиці $\overset{\circ}{U}(a)$, то це визначення еквівалентне тому, що

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \text{ в околі } \overset{\circ}{U}(a).$$

Приклади: $\sin 2x = \underline{O}(x)$ і $x \sin x = \underline{O}(x)$.

Якщо $f(x) = \bar{O}(g(x))$, то $f(x) = \underline{O}(g(x))$.

Лема $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \bar{O}(g(x))$.

Доказ:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \bar{O}(1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = g(x) + g(x) \cdot \bar{O}(1) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \bar{O}(g(x))$$

Властивості:

1° $\bar{O}(f) + \bar{O}(f) = \bar{O}(f)$ (тому що сума нескінченно малих є нескінченно малою);

2° $\bar{O}(f) \cdot \underline{O}(g) = \bar{O}(f \cdot g)$ (тому що $\frac{\bar{O}(f) \cdot \underline{O}(g)}{f \cdot g} = \frac{\bar{O}(f)}{f} \cdot \frac{\underline{O}(g)}{g}$ і добуток нескінченний малої на обмежену є нескінченно малою);

Наслідок: $\bar{O}(x^n) \cdot \underline{O}(x^m) = \bar{O}(x^{n+m})$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Використання 0-символіки при знаходженні границь.

Приклад: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos 2x - e^{x^2}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

Тому що $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{O}(x^2)$, $e^{x^2} = 1 + x^2 + \bar{O}(x^2)$, а $\operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$,

то, підставивши рівності в дану границю, одержимо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \bar{O}(x^2)\right) \cdot \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \bar{O}(x^2)\right) - 1 - x^2 - \bar{O}(x^2)}{x^2} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{5}{2}x^2 + x^4 + \bar{O}(x^2) - 1 - x^2 - \bar{O}(x^2)}{x^2} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Ми скористалися властивістю нескінченно малих.

Шкала росту елементарних функцій

Тому що послідовність $\frac{n}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ при $a > 1$, то функція $\frac{x}{a^x}$ також є нескінченно малою при $x \rightarrow \infty$ (у силу нерівностей $\frac{[x]}{a^{[x]+1}} < \frac{x}{a^x} < \frac{[x]+1}{a^{[x]}}$ і теореми «про двох міліціонерів»).

Зробивши заміну $x = \log_a t$, одержимо, що функція $\frac{\log_a t}{t}$ також є нескінченно малою при $t \rightarrow +\infty$.

Звідси легко одержати, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, тобто $\log_a x = \bar{O}(x^\varepsilon)$.

Останнє вираження також позначається: $\log_a x \ll x^\varepsilon$.

А з обліком попереднього, одержимо таку шкалу росту елементарних функцій:

$$(a > 1) \quad \log_a x \ll x^\varepsilon \ll a^x \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Приклад:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \lg x}{2^x - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^4}{2^x} + \frac{\lg x}{2^x}}{1 - \frac{x^2}{2^x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

3.6. Неперервність, властивості неперервних функцій

Def Функція $f(x)$ називається **неперервною** в точці $x_0 \in D_f$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Якщо x_0 є **граничною точкою** D_f , то це визначення еквівалентне тому, що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо x_0 є **ізолюваною точкою** D_f , то функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 .

Def

Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці множини $X \subset D_f$, то $f(x)$ **неперервна на множини** X і позначається $f(x) \in C(X)$.

Приклади:

1° $f(x) = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ - неперервна на $\mathbb{R}$, тому що $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$;

2° $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ - раціональна функція там, де $Q(x) \neq 0$, тобто в області визначення.

Def Функція $f(x)$ називається **неперервною ліворуч** у точці x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \text{ тобто } f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Функція $f(x)$ називається **неперервною праворуч** у точці x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0), \text{ тобто } f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Критерій неперервності: $f(x) \in C\{x_0\} \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ не є неперервною, то говорять, що x_0 є **точкою розриву** функції $f(x)$.

Класифікація розривів:

1) **Усунувий розрив**, якщо $\exists f(x_0 \pm 0) \wedge f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$.

Наприклад: $\frac{\sin x}{x}$ у точці 0.

2) **Розрив 1-го** чи роду **стрибок**, якщо $\exists f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$.

Наприклад: $\operatorname{sign} x$ чи $[x]$.

3) **Розрив 2-го** роду, якщо $\nexists f(x_0 + 0) \vee f(x_0 - 0)$.

Наприклад: $\frac{1}{x}$ або $\sin \frac{1}{x}$ в точці 0.

Приклад розривної усюди функції (функція Діріхле)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

У цієї функції в кожній точці – розрив 2-го роду.

Вправа. Придумати приклад функції, розривний у кожній точці $\mathbb{R}$, крім 0.

Теорема (арифметичні властивості неперервних функцій)

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0 , то і функції $f(x) + g(x)$ і $f(x) \cdot g(x)$ - теж неперервні в точці x_0 .

Якщо функція $g(x_0) \neq 0$, то і функція $\frac{f(x)}{g(x)}$ - теж неперервна в точці x_0 .

Доказ випливає з властивостей границь.

Теорема про неперервність суперпозиції

Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $g(y)$ неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$ і нехай визначена суперпозиція $g(f(x))$ в деяком околі $U(x_0)$. Тоді $g(f(x))$ неперервна в точці x_0 .

Доказ випливає з теореми про границю суперпозиції.

Властивості неперервних функцій

Теорема про збереження знака

Якщо функція $f(x)$ задана на $(a; b)$ й неперервна у деякій точці $x_0 \in (a; b)$ $f(x_0) \neq 0$, то $\exists U_\delta(x_0)$, у якій функція зберігає знак, тобто $\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$.

Доказ:

Узявши $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$, запишемо визначення неперервності в точці x_0 :

$$\exists U_\delta(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

Виходить $f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}$, тому $\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$.

Теорема доведена.

Теорема Больцано-Коши про існування кореня

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $f(a) < 0 < f(b)$ (або $f(a) > 0 > f(b)$), то $\exists c \in (a; b): f(c) = 0$.

Доказ:

Будемо шукати корінь методом половинного розподілу.

Візьмемо середину відрізка $\frac{a+b}{2}$ і якщо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то позначимо через $[a_1; b_1]$ той відрізок із двох половинок, де $\text{sign } f(a_1) \neq \text{sign } f(b_1)$.

Потім розділимо навпіл відрізок $[a_1; b_1]$ і якщо $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$, то виберемо той відрізок $[a_2; b_2]$, де $\text{sign } f(a_2) \neq \text{sign } f(b_2)$ і т.д.

Одержимо вкладену систему сегментів, що стягається, і по теоремі $\exists c = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$ Кантора.

Якщо $f(c) \neq 0$, то $\exists U_{\delta}(c): \forall x \in U_{\delta}(c): \text{sign } f(x) = \text{sign } f(c)$.

Але тому що для досить великих n $[a_n; b_n] \subset U_{\delta}(c)$, значить $\text{sign } f(a_n) \neq \text{sign } f(b_n)$.

Виникле протиріччя показує, що $f(c) = 0$ і *теорема доведена*.

Теорема про проміжні значення

Якщо $f(x) \in C[a; b]$, то $\forall d \in [f(a); f(b)] \quad \exists c \in [a; b]: f(c) = d$.

Доказ:

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - d \in C[a; b]$.

Якщо $f(a) < f(b)$, то $g(a) < 0 < g(b)$ і по попередній теоремі $\exists c \in [a; b]: g(c) = 0$, а значить $f(c) = d$.

Теорема доведена.

Теорема про розриви монотонної функції

Якщо функція $f(x)$ монотонна на сегменті $[a; b]$, то всі її розриви є **скачками** і їх не більш ніж зчислена множина.

Доказ:

Нехай у точці x_0 - розрив функції $f(x)$.

Тоді $\exists f(x_0 + 0)$ і $\exists f(x_0 - 0)$, причому $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ (інакше була би безперервність у точці x_0), тобто в точці x_0 - стрибок.

Розглянемо множину стрибків x_{α} і на інтервалі $(f(x_0 - 0); f(x_0 + 0))$ виберемо раціональну точку c_{α} . Тому що множина раціональних чисел зчисленна, то і множина $\{c_{\alpha}\}$ зчисленна, а значить і множина $\{x_{\alpha}\}$ теж зчисленна.

Теорема доведена.

Теорема (Критерій неперервності монотонної функції)

Монотонна на сегменті $[a; b]$ функція $f(x)$ є неперервною тоді і тільки тоді, коли вона приймає усі свої проміжні значення між $f(a)$ і $f(b)$.

Доказ:

Необхідність випливає відразу з теореми про проміжні значення.

Доведемо достатність.

Припустимо, що у функції $f(x)$ маєсья розрив у точці x_0 .

Тоді – це стрибок і $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$.

Але, узявши точку $d \in (f(x_0 - 0); f(x_0 + 0)) \setminus \{f(x_0)\}$, одержимо для неспадної функції $f(x)$, що $\forall x > x_0: f(x) > d$, а $\forall x < x_0: f(x) < d$.

Виходить $\forall x \in [a; b] \quad f(x) \neq d$, что суперечить умові теореми.

Теорема доведена.

Теорема про неперервність оберненої до монотонної функції

Нехай $f(x)$ строго монотонна і неперервна на $[a; b]$.

Тоді існує обернена до неї функція, що також є строго монотонною і неперервною функцією.

Доказ:

З попередньої теореми випливає, что образом функції $f(x)$ є відрізок $[f(a); f(b)]$ (або відрізок $[f(b); f(a)]$), причому функція $f(x)$ є бієкцією.

Тому існує обернена функція $f^{-1}(x)$, визначена на відрізку $[f(a); f(b)]$ і також є строго монотонної на цьому відрізку, тому що $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (для випадку $f(x) \uparrow$).

Тому що зворотна функція приймає усі свої проміжні значення на $[a; b]$, то вона неперервна, *что і було потрібно довести.*

Неперервність елементарних функцій

Неперервність тригонометричних функцій

$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$, тому що $\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Тому $\sin x \in C(\mathbb{R})$.

Аналогічно $\cos x \in C(\mathbb{R})$.

А виходить $\operatorname{ctg} x \in C(\mathbb{R} \setminus \{k\pi\})$, а $\operatorname{tg} x \in C\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\right)$.

Тобто тригонометричні функції неперервні на всій області визначення.

Неперервність показникової функції

Спочатку визначимо показникову функцію.

Def

Якщо $a > 1$, то $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x \stackrel{\text{Def}}{=} \sup \{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r \leq x\}$.

Якщо $a < 1$, то $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x \stackrel{\text{Def}}{=} \inf \{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r \leq x\}$.

Якщо $a = 1$, то $1^x = 1$.

Якщо $a = 0$ і $x > 0$, то $a^x = 0$.

Можна показати, що вірно тотожність:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Доведемо неперервність показникової функції.

Спочатку доведемо **неперервність у 0**.

Тому що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| a^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$.

Нехай $a > 1$, тоді $a^x \uparrow$ і значить при $0 < x < \delta_\varepsilon = \frac{1}{N_\varepsilon + 1}$ маємо $1 < a^x < a^{\frac{1}{N_\varepsilon + 1}} < 1 + \varepsilon$.

Тобто $\lim_{x \rightarrow +0} a^x = 1$. А тому що $\lim_{x \rightarrow -0} a^x = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{a^{-x}} = 1$, то **неперервність у 0 доведена**.

Звідси випливає, що $a^x - a^{x_0} = a^{x_0} (a^{\Delta x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, тобто **доведена неперервність функції в кожній точці**.

Ми розбирали випадок $a > 1$. Але при $a \in (0, 1)$ $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ і знаменник – неперервна позитивна функція, а значить весь дріб – теж неперервна функція.

Вправа *

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умові $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ і є неперервною в 0, то $f(x) = a^x$.

Обернені тригонометричні та логарифмічна функції неперервні за теоремою о неперервності оберненої функції.

Def

Елементарної будемо називати функцію, отриману з найпростіших елементарних функцій, тобто - раціональних,

- показникових,

- логарифмічних,

- степеневих,

- тригонометричних і обернених тригонометричних

у результаті кінцевого числа арифметичних операцій і суперпозицій.

Наприклад.

$f(x) = \sqrt{\sin^2 x + \arctg(2^x)}$ - елементарна функція, а $[x]$ або $\text{sign } x$ - неелементарні функції.

Теорема

Елементарні функції неперервні усюди в області визначення.

Доказ:

Доказ випливає з неперервності всіх найпростіших елементарних функцій в області визначення і неперервності суми, добутку, відносини і суперпозиції в області визначення.

1-я теорема Вейерштрасса

Якщо функція $f(x) \in C[a; b]$, то $f(x)$ - обмежена.

Доказ:

Припустимо протилежне, тобто $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a; b]: |f(x_n)| > n$.

По теоремі Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a; b] \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$, а значить функція $f(x_{n_k})$ - обмежена, що суперечить припущенню.

Зауваження. Для інтервалу теорема не вірна, наприклад, $f(x) = \frac{1}{x}$ на інтервалі $(0; 1)$ неперервна, але не обмежена.

2-я теорема Вейерштрасса

Якщо функція $f(x) \in C[a; b]$, то $\exists x_1, x_2 \in [a; b] : f(x_1) = \sup_{[a; b]} f(x)$ і $f(x_2) = \inf_{[a; b]} f(x)$.

Доказ:

Нехай $M = \sup_{[a; b]} f(x)$. Припустимо, що $\forall x \in [a; b] \quad f(x) < M$.

Тоді функція $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ неперервна на $[a; b]$, а значить – обмежена, тобто $g(x) \leq c$.

Тоді $f(x) \leq M - \frac{1}{c}$, що суперечить визначенню $\sup f(x)$.

Аналогічно доводиться, що $\inf f(x)$ - **теж досягається**.

Зауваження. Для інтервалу теорема не вірна (див. попередній приклад).

Наслідок. Образ відрізка $[a; b]$ при неперервному відображенні – теж відрізок.

Розділ 4 Похідні та диференціали, їх застосування

4.1. Похідна та диференціал, їх геометричний та фізичний зміст. Арифметичні властивості похідної, таблиця похідних.

Похідна

Похідна – одне з основних понять мат.аналізу – виникла в XVII столітті в роботах Ньютона і Лейбніца.

Def

Нехай функція $f(x)$ визначена в деяком околі точці x_0 .

Якщо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, ця границя називається **похідної** функції $f(x)$ в точці x_0 і

позначається $f'(x_0)$ або $\frac{df(x_0)}{dx}$.

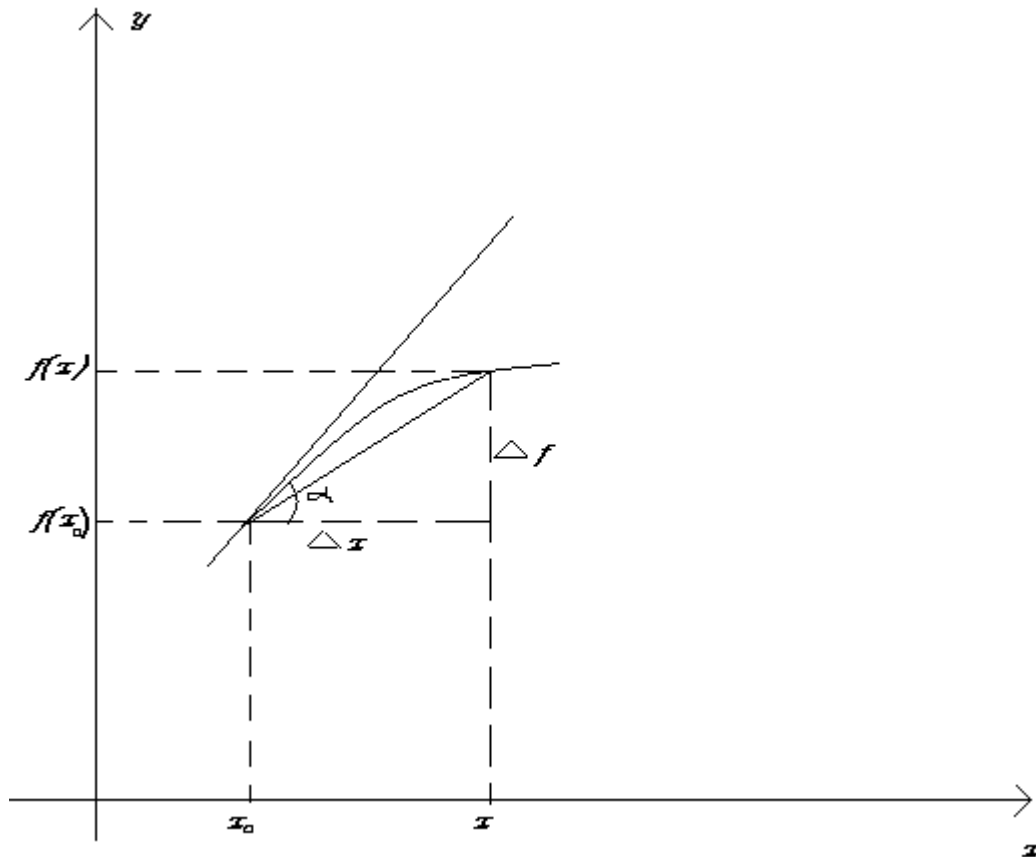
Приклади: 1° $C' = 0$, тобто похідна константи дорівнює нулю.

$$2^\circ \quad f(x) = x^2, \quad \text{тоді} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Геометричний зміст похідної:

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α - кут між дотичною і віссю OX .

(Дотичної називається граничне положення січної)



Рівняння **дотичної**: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Рівняння **нормалі**: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, якщо $f'(x_0) \neq 0$
і $x = x_0$, якщо $f'(x_0) = 0$.

Фізичний зміст похідної: миттєва швидкість.

Теорема (необхідна умова існування похідної)

Якщо $\exists f'(x_0)$, то функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 .

Доказ

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0, \text{ тобто функція } f(x) \text{ неперервна в точці } x_0.$$

Зауваження.

Зворотне твердження – невірне, тобто існують неперервна в точці x_0 функції, у яких не існує похідної.

Наприклад, $f(x) = |x|$ в $x_0 = 0$.

Пізніше в нас буде приклад функції неперервної усюди, у якої $\nexists f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Властивості похідної:

$$1^\circ (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

$$2^\circ (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ці дві властивості випливають з визначення похідної і границі.

$$3^\circ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

Доказ:

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \frac{g(x) \cdot \Delta x + f(x_0) \cdot \Delta g}{\Delta x} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

$$4^\circ \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}, \text{ якщо } g(x) \neq 0.$$

Доказ:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)} = \frac{g(x_0) \cdot \Delta f - f(x_0) \cdot \Delta g}{g(x) \cdot g(x_0)}.$$

$$\text{Значить } \frac{\Delta \left(\frac{f}{g} \right)}{\Delta x} = \frac{g(x_0) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x_0) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x) \cdot g(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

5° Теорема про похідну суперпозиції

Якщо визначена суперпозиція $h(x) = g(f(x))$ в деяком околі точці x_0 й існують похідні $f'(x_0)$ і $g'(f(x_0))$, то існує і похідна $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Доказ:

$$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Це було зроблено в припущенні, що $f(x) \neq f(x_0)$ в деякій точці $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Якщо ж $\forall \delta > 0 \quad \exists x_1 \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0): f(x_1) = f(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

А тому що $h(x_1) = h(x_0)$, то і $h'(x_0) = 0$, тобто й у цьому випадку рівність виконується і *теорема доведена*.

6° Теорема про похідну оберненої функції

Нехай функція $f(x)$ - строго монотонна і неперервна в деяком околі $U(x_0)$ й існує похідна $f'(x_0) \neq 0$.

Тоді в деяком околі $U(f(x_0))$ існує функція $g(y) = f^{-1}(y)$ і $\exists g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, де

$$y_0 = f(x_0).$$

Таким чином, похідна до оберненої функції обернена (в алгебраїчному змісті) похідної вихідної функції.

Доказ:

Існування оберненої функції впливає з теореми про обенену до монотонної неперервної функції.

Розглянемо вираз: $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$, тому що при

$y \rightarrow y_0 \Rightarrow x \rightarrow x_0$ в силу неперервності оберненої функції.

Геометричний зміст рівності $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ означає, що дотична до оберненої функції

утворить з віссю OY такий же кут як і дотична вихідної функції з віссю OX в силу симетрії.

Таблиця похідних

$$1^\circ \quad C' = 0$$

$$2^\circ \quad x' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{x - x_0} = 1$$

$$3^\circ \quad (x^n)'_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1}$$

$$4^\circ \quad (a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \ln \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

$$5^\circ \quad (\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \forall x > 0$$

$$6^\circ \quad (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$7^\circ \quad (\sin x)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{x_0 + x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0$$

$$8^\circ \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\text{довести самостійно})$$

$$9^\circ \quad (tg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \cos' x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{при } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$10^\circ \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi \quad (\text{довести самостійно})$$

$$11^\circ \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1$$

$$12^\circ \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{довести самостійно})$$

$$13^\circ \quad (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$14^\circ \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (\text{довести самостійно})$$

$$\text{Приклад: } \left(\sqrt{\cos 2x + \operatorname{arctg}^2 x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x + \operatorname{arctg}^2 x}} \cdot \left(-2 \sin 2x + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right).$$

Однобічні похідні

Def

Лівої похідної називається $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Правої похідної називається $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Ліва похідна може не збігатися з правою похідною (у графіка - це кут).

Наприклад, для $f(x) = |x|$ $f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = -1$.

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Def

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, то говорять, що $f'(x_0) = \infty$ - нескінченна похідна.

Геометричний зміст нескінченної похідної $f'(x_0) = \infty$ - це вертикальна дотична.

Наприклад, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у точці $x_0 = 0$.

Похідна параметрически заданої функції

Def

Нехай $x(t)$ і $y(t)$ - неперервні функції на інтервалі $(a; b)$ і функція $x(t)$ має обернену їй функцію. Тоді функція $y(x) = y(t^{-1}(x))$ називається **параметрически заданою**

функцією, обумовленої рівняннями
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Якщо обидві функції мають похідні, причому $x'(t) \neq 0$, то похідна параметрически заданої функції визначається по формулі:

$$\frac{dy}{dx} = y'_t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Наприклад: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad y'_x = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$

Диференціал

Def

Нехай функція $f(x)$ визначена в $U(x_0)$

Тоді $f(x)$ диференційована в точці x_0 , якщо $\Delta f = A \cdot \Delta x + \bar{0}(\Delta x)$.

Теорема

Функція диференційована в точці x_0 тоді і тільки тоді, якщо $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$ і $A = f'(x_0)$.

Доказ:

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\bar{0}(\Delta x)}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad A = f'(x_0).$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \bar{0}(1) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \bar{0}(\Delta x).$$

Наслідок. A - визначається однозначно.

Def $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$, якщо позначити $\Delta x = dx$.

Зауваження. Звідси – позначення: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$.

Геометричний зміст диференціала – збільшення дотичної.

Дотична – це найбільш близька з прямих, що проходить через $(x_0; f(x_0))$, тобто це $\Delta f - \Delta y = 0(\Delta x)$.

Властивості диференціалів

$$1^\circ \quad d(\lambda f + \lambda g) = \lambda df + \lambda dg;$$

$$2^\circ \quad d(f \cdot g) = g df + f dg;$$

$$3^\circ \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}.$$

Інваріантність форми 1-го диференціала

Нехай $x = x(t)$ - диференційована функція.

Тоді $d f(x(t)) = f'(x) x'(t) dt = f'(x) dx$, тобто формула 1-го диференціала не міняється, якщо x - залежна перемінна.

Застосування диференціала до наближеного обчислення

$$\Delta f = d f(x_0) + \bar{0}(\Delta x) \quad \xrightarrow{\Delta x \ll 1} \quad \Delta f \approx d f(x_0).$$

Наприклад:

$$\ln(1,02) \approx \ln 1 + d \ln x \Big|_{x=1}^{\Delta x=0,02} = \frac{1}{x_0} \Big|_{x_0=1} \Delta x = 0,02 \quad (\text{погрішність оцінимо пізніше}).$$

4.2. Похідні та диференціали вищих порядків

Якщо функція $f(x)$ диференційована на проміжку J , то можна порушувати питання про диференційованості функції $g(x) = f'(x)$.

Def Якщо $\exists (f'(x))' = f''(x)$ (чи $\frac{d^2 f}{dx^2}$) - друга похідна

Аналогічне визначення для $f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Таблиця похідних вищих порядків

$$1^\circ \quad (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. \quad \text{Якщо } \alpha \in \mathbb{N}, \text{ то } (x^n)^{(n)} = n!; \quad (x^n)^{(n+1)} \equiv 0.$$

$$2^\circ \quad (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

$$3^\circ \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}.$$

$$4^\circ \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad \text{по індукції:}$$

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

$$5^\circ \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \quad (\text{довести самостійно})$$

Формула Лейбница:

Нехай $\exists f^{(n)}$ і $g^{(n)}$; $x \in J$.

$$\text{Тоді } (f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

1

1 1

1 2 1

- трикутник Паскаля.

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Приклад:

$$\begin{aligned} (x^2 \sin 2x)^{(100)} &= x^2 \underbrace{\sin^{(100)} 2x}_{=2^{100} \sin 2x} + 100 \cdot 2x \cdot \underbrace{\sin^{(99)} 2x}_{=2^{99} (-\cos 2x)} + \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot \underbrace{2 \sin^{(98)} 2x}_{=2^{98} \sin 2x} = \\ &= 2^{100} (x^2 \sin 2x - x \cos 2x - 9900 \cdot 4 \sin 2x) \end{aligned}$$

Def

$$d^2 f(x) = d(d f(x)) = f''(x)(dx)^2$$

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Формула Лейбница для диференціалів: $d^n (fg) = \sum C_n^k d^{n-k} f \cdot d^k f$.

Неінваріантність 2-го і вищих диференціалів

Для функції $f(x(t))$, де $f(x) \in C^2$ і $x(t) \in C^2$:

$$d^2 f(x(t)) = d(f'(x(t))dx) = df'(x) \cdot dx + f'(x)d^2x = f''dx^2 + f'(x)d^2x.$$

$= f''(x)dx^2$

Зауваження.

Якщо $x(t) = at + b$, то $d^2x = 0$ і $d^n f(x(t)) = f^n dx^n$, тобто має місце інваріантність форми 2-го диференціала.

Друга похідна оберненої функції

Якщо $g(y)$ - обернена функція до $f(x)$, то, як було доведено раніше, $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Диференціюємо цю рівність по y :

$$g''(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = - \frac{f''(x)}{f'^2(x)} \cdot g'(y) = - \frac{f''(x)}{f'^3(x)}.$$

Аналогічно обчислюються похідні вищих порядків від оберненої функції.

Старші похідні параметрически заданих функцій

Якщо функція задана параметрически рівностями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де $x(t); y(t)$ - диференційовані функції, то її похідна визначається по формулі:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Тоді друга похідна цієї функції визначається по формулі:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{y'}{x'} \right)'}{x'} = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x'(t)^3}.$$

Аналогічно обчислюється третя похідна.

Приклад: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Рішення: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\operatorname{ctg} t)'}{\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$

4.3. Властивості диференційованих функцій. Формула Тейлора.

Властивості диференційованих функцій

Def

Нехай x_0 - внутрішня точка D_f , тобто $\exists U(x_0) \subset D_f$.

Уведемо поняття **локального екстремума** (*loc extr*).

Точка x_0 є **локальним максимумом** (*loc max*),

якщо виконується умова $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.

У випадку, коли $f(x) < f(x_0)$, точку x_0 називають **строгим максимумом**.

Точка x_0 є **локальним мінімумом** (*loc min*),

якщо виконується умова $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Аналогічно, якщо $f(x) > f(x_0)$, точку x_0 називають **строгим мінімумом**.

Розглянемо приклад:

Функція $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ в нулі має строгий максимум,
а в точках $x = \pm 1$ дана функція має **крайовий екстремум**.

Теорема Ферма (Необхідна умова екстремума)

Нехай x_0 - внутрішня точка локального екстремума і $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Доказ:

Якщо в точці x_0 - max, то $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$, тому що $\Delta f < 0$.

А. $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$. Отже, $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно розглядається випадок мінімуму функції.

Геометричний зміст: у точці екстремума дотична (якщо вона існує) – горизонтальна.

Зауваження 1. Сущевенно, що x_0 - внутрішня точка, тому що на межі $f'(x_0)$ може не дорівнювати нулю.

Зауваження 2. Умова $f'(x_0) = 0$ не є достатньою для існування екстремума, наприклад, для функції $y = x^3$.

!!! Достатня умова буде розглянуто пізніше.

Теорема Роля

Якщо $f(x) \in C[a; b]$ і $\exists f'(x) \quad \forall x \in (a; b)$ за умови, що $f(a) = f(b)$,

$\exists c \in (a; b) : f'(c) = 0$.

Доказ:

Існує точка max або точка min $\in (a; b)$ ($\forall f(x) \equiv C$) й у ній $f'(c) = 0$ (по теоремі Ферма).

Вправа. $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n$ має n дійсних коренів на $[-1; 1]$.

Теорема Лагранжа

Якщо функція $f \in C[a; b]$ й існує похідна на $(a; b)$, тоді

$$\exists c \in (a; b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказ:

$$\text{Уведемо } g(x) = f(x) - kx \text{ так, щоб } g(b) = g(a) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$\text{Тоді, застосовуючи теорему Ролля, одержимо: } g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема Лагранжа узагальнює теорему Ролля.

Геометричний зміст: існує дотична, паралельна хорді.

Формула кінцевих збільшень

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x \quad \theta \in (0; 1).$$

Наслідок 1. Якщо $f'(x) = 0$ на $[a; b] \Rightarrow f(x) = \text{const}$ на $[a; b]$.

Наслідок 1.1. Якщо $\exists f'(x_0 + 0)$, тоді $\exists f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x)$.

Наслідок 2. Якщо $f'(x) \geq 0$ на $J \Leftrightarrow f(x) \nearrow$ - з формули Лагранжа (зворотнє – випливає з визначення f')

Якщо $f'(x) > 0$ на $J \Rightarrow f(x) \uparrow$

Якщо $f'(x) \leq 0$ на $J \Leftrightarrow f(x) \searrow$

Теорема 1-а достатня умова екстремума

Якщо x_0 - критична точка і (тобто $f'(x_0) = 0 \vee \nexists f'(x_0)$) и

а) $\exists f'(x) < 0 \quad x \in (x_0 - \delta; x_0)$

и $\exists f'(x) > 0 \quad x \in (x_0; x_0 + \delta)$,

то $x_0 - \text{loc min}$.

б) $\exists f'(x) > 0 \quad x \in (x_0 - \delta; x_0)$

и $\exists f'(x) < 0 \quad x \in (x_0; x_0 + \delta)$,

то $x_0 - \text{loc max}$.

в) якщо похідна знак не змінює, то екстремума немає.

Доказ:

а) $\Delta f(x) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x > 0 \Rightarrow x_0 - \text{loc min}$.

Аналогічні докази для пунктів **б)** и **в)**.

Наслідок 3. Якщо $|f'(x)| < c \quad \forall x \in J \Rightarrow f(x) \in \text{Lip}(J)$,

тобто $|f(x_1) - f(x_2)| < c |x_1 - x_2| \Rightarrow$ рівномірно неперервна на J .

Приклад: $f(x) = \arctg x$.

Тому що $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, то $|\arctg x_1 - \arctg x_2| \leq |x_1 - x_2|$;

Теорема Коші

Нехай функції $f(x), g(x) \in C[a; b] \wedge \exists f'(x), g'(x) \quad x \in (a; b)$,

причому $g(b) \neq g(a) \Rightarrow \exists c \in (a; b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказ:

Уведемо $F(x) = f(x) - k \cdot g(x)$ так, щоб $F(a) = F(b)$, тобто $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

$\exists c \in (a; b) : F'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Геометричний зміст: дотична параметрически заданої функції: $k : \begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$ паралельна хорді.

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа при $g(x) = x$.

Правила Лопітала

Розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$.

1-е правило Лопітала

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ - неперервні в $U(x_0)$, диференційовні в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Тоді 1-е правило Лопітала формулюється так:

$$\text{Якщо } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказ:

а) $|x_0| < \infty$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \stackrel{m. Коши}{=} \frac{f'(x_0 + \theta \Delta x)}{g'(x_0 + \theta \Delta x)} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} A, \quad m.e. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

б) $x_0 = \infty$

$$\text{Уведемо заміну: } x = \frac{1}{t} \quad \text{і} \quad f_1(t) = f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Визначимо функцію в 0 нулем, тобто $f_1(0) = 0$.

Аналогічно: $g_1(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$.

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доведена.

Теорема 1'

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в околі $U(x_0)$ і $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, якщо $g'(x_0) \neq 0$.

Доказ:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f / \Delta x}{\Delta g / \Delta x} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Теорема доведена.

2-е правило Лопітала (без доказу)

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ - неперервні в $U(x_0)$, диференційовані в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Тоді 2-і правило Лопітала формулюється так:

$$\text{Якщо } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Зауваження.

1) Можна розглядати однобічні границі: $x \rightarrow x_0 \pm 0 \quad \vee \quad x \rightarrow \pm \infty$.

2) Може існувати $\lim \frac{f}{g}$, але не існувати $\lim \frac{f'}{g'}$.

Наприклад:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0, \text{ але } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Тут можна застосувати теорему **T1'**: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1}.$

Приклади на правила Лопітала

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^5 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 3}{5x^4 - 1} = \frac{2}{4}.$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x}}{2} = 2.$$

$$3^o \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$$

$$4^o \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-k)\dots(\alpha-k+1)^{\alpha-k}}{e^x} = 0.$$

$$\text{т.е. } \ln x \ll x^\alpha \ll e^x \quad (\alpha > 0).$$

Вправа

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln x = 0 \quad \varepsilon > 0.$$

$$\text{Отже } \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = 1.$$

Формула Тейлора

Нехай $P(x)$ - багаточлен.

$$\text{Представимо його у виді } P(x) = \sum_{k=1}^n A_k (x - x_0)^k.$$

$$A_0 = P(x_0); \quad A_1 = P'(x_0) \quad \dots \quad A_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!},$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

$$\stackrel{\text{def}}{0!} = 1$$

Теорема 1 (формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано)

$$\text{Нехай } \exists f^{(k)}(x) \quad k=1, \dots, n-1 \quad \forall x \in U(x_0)$$

$$\text{і } \exists f^{(n)}(x_0) \Rightarrow \forall x \in U(x_0) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \bar{O}(\Delta x^n).$$

Доказ:

По індукції при $n=1$: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \bar{O}(\Delta x)$ з визначення диференційовності в точці x_0 .

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)\Delta x^n}{n!}}{\Delta x^n} = \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)\Delta x - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)\Delta x^{n-1}}{(n-1)!}}{n\Delta x^{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

Тут ми використовували правило Лопітала й індуктивне припущення для $f'(x)$.

Теорема доведена.

!!!! При $x_0 = 0$ формула називається формулою **Маклорена**.

Розкладання елементарних функцій по формулі Тейлора – Маклорена

$$1) e^x = \sum_0^n \frac{x^k}{k!} + \bar{0}(x^n), \text{ тому що } (e^x)^{(k)} = e^x \Big|_0 = 1.$$

$$2) \sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{0}(x^{2n+2}), \text{ тому що}$$

$$(\sin x)^n = \sin \left(x + \frac{\pi n}{2} \right) \Big|_0 = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^k & n = 2k+1 \end{cases}.$$

$$3) \cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \bar{0}(x^{2n+1}).$$

$$4) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \bar{0}(x^n),$$

$$\text{Зокрема: } (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \bar{0}(x^n).$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \bar{0}(x^n) \quad (\text{довести самостійно}).$$

$$6) sh x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{0}(x^{2n+2}).$$

$$7) ch x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \bar{0}(x^{2n+1}).$$

Ці розкладання використовуються при знаходженні границь.

$$\text{Приклад: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 / 4!}{x^4} = \frac{1}{4!}.$$

Теорема 2 (формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа)

Нехай $\exists f^{(n+1)}(x) \quad \forall x \in U(x_0)$

$$\Rightarrow \forall x \in U(x_0) \quad f(x) = \sum_0^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \Delta x^{n+1}; \quad \xi \in (x_0; x).$$

Доказ (буде приведено пізніше).

$$\text{Зауваження. } \Delta f = \sum_0^n \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x).$$

Наслідок. Формула Тейлора для багаточлена випливає з теореми 2.

Застосування формули Тейлора в наближених обчисленнях

Формула $\Delta f = df(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + \theta \Delta x)$ дозволяє оцінити погрішність у використуванні

$$\text{раніше рівності } \Delta f \approx df(x_0) \Rightarrow |\Theta| \leq \frac{1}{2} |f''(x_0 + \theta \Delta x)| \cdot \Delta x^2.$$

Приклад:

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{n a^{n-1}}.$$

Оцінимо погрішність цієї формули.

Тому що $f''(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) (a^n + x)^{\frac{1}{n} - 2}$, то погрішність $|\Theta| \leq \frac{(n-1)x^2}{n^2 a^{2n-1}}$.

Наприклад: $\sqrt[5]{31} \approx 1 \frac{79}{80}$ і погрішність складе $\theta \leq \frac{4}{25 \cdot 29} < \frac{1}{3000}$.

4.4. Екстремуми, необхідні та достатні умови екстремумів.

Необхідна умова екстремума була доведена раніше (дивись Теорема Ферма)

1-а Достатня умова екстремума Якщо x_0 - критична точка й $\exists f'(x) < 0 \quad x \in (x_0 - \delta; x_0)$

і $\exists f'(x) > 0 \quad x \in (x_0; x_0 + \delta)$,

то $x_0 - \text{loc min}$.

Якщо $\exists f'(x) > 0 \quad x \in (x_0 - \delta; x_0)$ й і $\exists f'(x) < 0 \quad x \in (x_0; x_0 + \delta)$, то $x_0 - \text{loc max}$.

Теорема (2 – а Достатня умова екстремума)

Нехай x_0 - стаціонарна точка, тобто $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad \exists f''(x_0)$.

Тоді при:

а) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ у точці x_0 имеем loc max ;

б) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ у точці x_0 имеем loc min .

Доказ:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \underset{\text{по Тейлору}}{=} \underbrace{f'(x_0)}_{=0} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2} \Delta x^2 + \bar{0}(\Delta x^2) = \Delta x^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2} + \bar{0}(1) \right].$$

Тому що знак квадратної дужки збігається зі знаком $f''(x_0)$, то:

у випадку а) $\Delta f < 0$, тобто строгий loc max ;

а у випадку б) $\Delta f > 0$, тобто строгий loc min .

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо $f''(x_0) = 0$, то питання залишається відкритим.

Теорема (3 – я Достатня умова екстремума)

Нехай x_0 - стаціонарна точка, $\exists f^{(k)}(x_0) \quad k \leq n$ і $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тоді при:

а) $n = 2k$: $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ у точці x_0 имеем строгий loc max ;

$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ у точці x_0 имеем строгий loc min ;

б) $n = 2k + 1 \Rightarrow \nexists \text{extr}$ у точці x_0 .

Доказ:

$$\Delta f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot \Delta x^n + \bar{0}(\Delta x^n) = \Delta x^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{0}(1) \right).$$

Звідси виходить випадок а) – аналогічно попередній теоремі.

В другому випадку збільшення функції змінює знак, а значить $\Rightarrow \nexists \text{extr}$.

Теорема доведена.

Приклад 1. $f(x) = 3x^2 - 2x^3$

$f'(x) = 6x - 6x^2 \quad x_0 = 0; \quad x_1 = 1$ - стаціонарні точки.

$f''(x) = 6 - 12x \quad f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow$ у точці 0 - min ,

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ у точці 1 - max .

Приклад 2. $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x = 2 \operatorname{sh} x - 2 \sin x = 0 \quad \text{при } x = 0$,

$$f''(x) = 2(ch\,x - \cos x) = 0,$$

$$f'''(x) = 2(sh\,x + \sin x)|_0 = 0,$$

$$f^{(IV)}(x) = 2ch\,x + 2\cos x = 4 > 0 \Rightarrow \min.$$

Приклад 3. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

У цієї функції все похідні в 0 дорівнюють нулю і вона має в 0 $\min$.

Приклад 4. $f(x) = x^2(2 - \sin \frac{1}{x})$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Легко бачити, що ця функція має $\min$ в 0, але в околі нуля не є монотонної.

Знаходження найбільшого і найменшого значень функції на сегменті.

Как известно, непрерывна на сегменті функція має найбільше і найменше значення. Якщо вони досягаються усередині сегмента, то це – точки локального екстремума, а, виходить, у них похідна рань чи нулю не існує.

Тому, для перебування найбільшого і найменшого значень функції треба знайти всі критичні точки, додати кінці відрізка a і b .

Тоді $\sup f(x) = \max_k \{f(x_k), f(a), f(b)\}$, де x_k - критичні точки.

Аналогічно знаходиться мінімум функції.

Приклад: $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ $x \in [-2; 3]$

Знайдемо нулі для рівняння $x^2 - 4x - 5 = 0$.

$x_1 = -1$, $x_2 = 5 \notin [-2; 3]$ - у цих точках $\nexists f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x \notin [-1; 5] \\ -2x + 4 & x \in (-1; 5) \end{cases} \Rightarrow x_3 = 2 \text{ - стационарна точка}$$

$$\max \{f(-2) = 7; f(3) = 8; f(-1) = 0; f(2) = 9\} = 9.$$

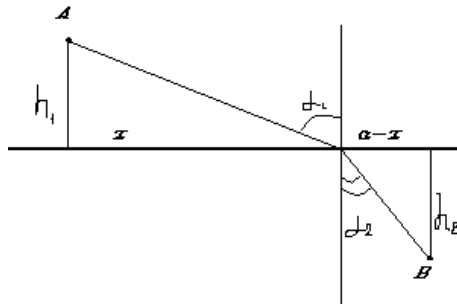
$$\min = 0.$$

Закон переломлення світла.

За принципом Ферма світло проходить шлях між будь-якими двома точками за найкоротший час

(зокрема, в однорідному середовищі – поширюється по прямій).

Одержимо закон переломлення світла.



$$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}{V_2}$$

$$T'(x) = \frac{x}{V_1 \cdot \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{(a-x)}{V_2 \cdot \sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{так как } \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha_1, \frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = \sin \alpha_2,$$

$$\text{то } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

4.5. Дослідження функцій та побудова графіків.

Асимптоти

Нехай крива K задана параметрически, тобто:

$$K: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; \omega) \quad \vee \quad t \in (\omega; b],$$

де $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$; $x(t)$ і $y(t)$ - неперервні функції.

Def

При $t \rightarrow \omega$ крива K має нескінченну область, якщо $x^2(t) + y^2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \omega} +\infty$, тобто точка на кривій необмежено віддаляється від початку координат.

Def

Пряма $Ax + By + C = 0$ називається **асимптотой** нескінченної області кривої K при $t \rightarrow \omega$, якщо відстань від точки $M(x(t); y(t))$ до прямої прямує до нуля.

Зауваження

Крива може перетинати асимптоту і навіть збігатися з нею.

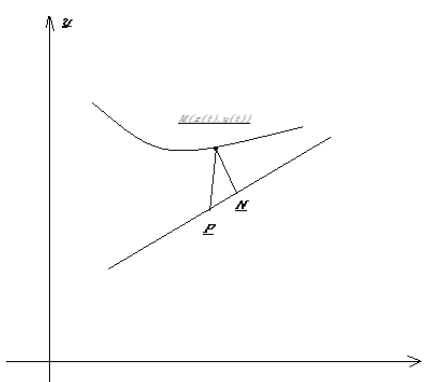
Наприклад, $y = x$.

Теорема (Критерій асимптоти)

I. $y = kx + b$ - похила асимптота $\Leftrightarrow \exists \lim_{t \rightarrow \omega} \frac{y(t)}{x(t)} = k \quad \wedge \quad \exists \lim_{t \rightarrow \omega} (y(t) - kx(t)) = b$.

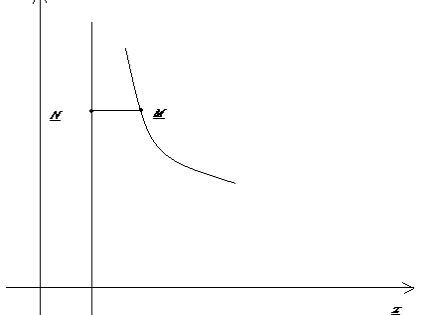
II. $x = x_0$ - вертикальна асимптота $\Leftrightarrow \exists \lim_{t \rightarrow \omega} x(t) = x_0 \quad \wedge \quad \exists \lim_{t \rightarrow \omega} y(t) = \infty$.

Доказ I

	$\rho(t) = \frac{ y(t) - kx(t) - b }{\sqrt{1 + k^2}} \xrightarrow{t \rightarrow \omega} 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)} - k - \frac{b}{x(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \omega} 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \omega} \frac{y(t)}{x(t)} = k \quad \wedge \quad b = \lim_{t \rightarrow \omega} (y(t) - kx(t))$
---	--

З другої границі ($\lim_{t \rightarrow \omega} (y(t) - kx(t)) = b$) випливає $\rho(t) \xrightarrow{t \rightarrow \omega} 0$.

Доказ II

	$\rho(t) = x(t) - x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \omega} 0, \text{ тобто } \lim_{t \rightarrow \omega} x(t) = x_0.$ А тому що $(x^2(t) + y^2(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \omega} \infty \Rightarrow y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \omega} \infty.$
---	--

Теорема доведена.

Случай явно заданої функції

$$y = t(x) \quad (t = x).$$

$$x^2 + f^2(x) \rightarrow \infty \Leftrightarrow 1) x \rightarrow \infty \vee 2) f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty.$$

$$\text{I. } y = kx + b \text{ - асимптота} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b.$$

$$\text{II. } x = x_0 \text{ - вертикальна асимптота} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Наслідок.

Якщо $f(x) = kx + b + \bar{0}(1)$, то $y = kx + b$ - асимптота.

Приклади

$$1. \quad y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{а) } x \rightarrow 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \infty, \text{ тобто } x=1 \text{ - вертикальна асимптота.}$$

$$\text{б) } x \rightarrow \infty \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad y = x + 1 \text{ - похила асимптота.}$$

$$2. \quad \begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

$$\text{а) } t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty; \quad y \rightarrow 0, \text{ тобто } y=0 \text{ - горизонтальна асимптота.}$$

$$\text{б) } t \rightarrow 1 \Rightarrow k = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2}; \quad b = \lim_{t \rightarrow 1} \left[\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{(t-1)} \right] = -\frac{3}{4},$$

$$\text{тобто } y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \text{ - похила асимптота.}$$

$$\text{в) } t \rightarrow -1 \Rightarrow x \rightarrow -\frac{1}{2}; \quad y \rightarrow \infty, \text{ тобто } x = -\frac{1}{2} \text{ - вертикальна асимптота.}$$

Опуклість

Def I

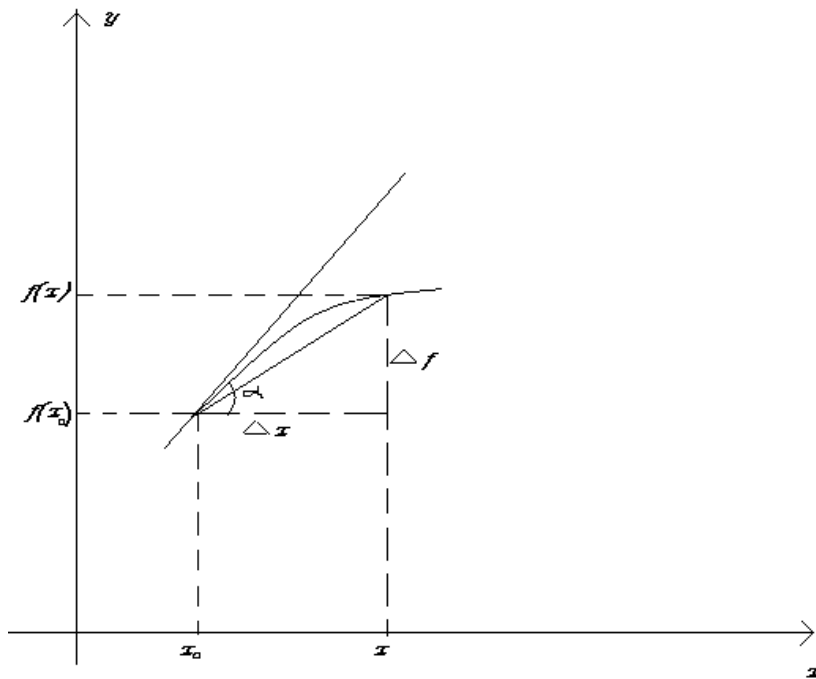
Нехай функція $f(x)$ визначена на $(a; b)$.

Тоді $f(x)$ називається **опуклої вниз (опуклої)** на $(a; b)$, якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) \quad \forall \alpha_1; \alpha_2 \geq 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

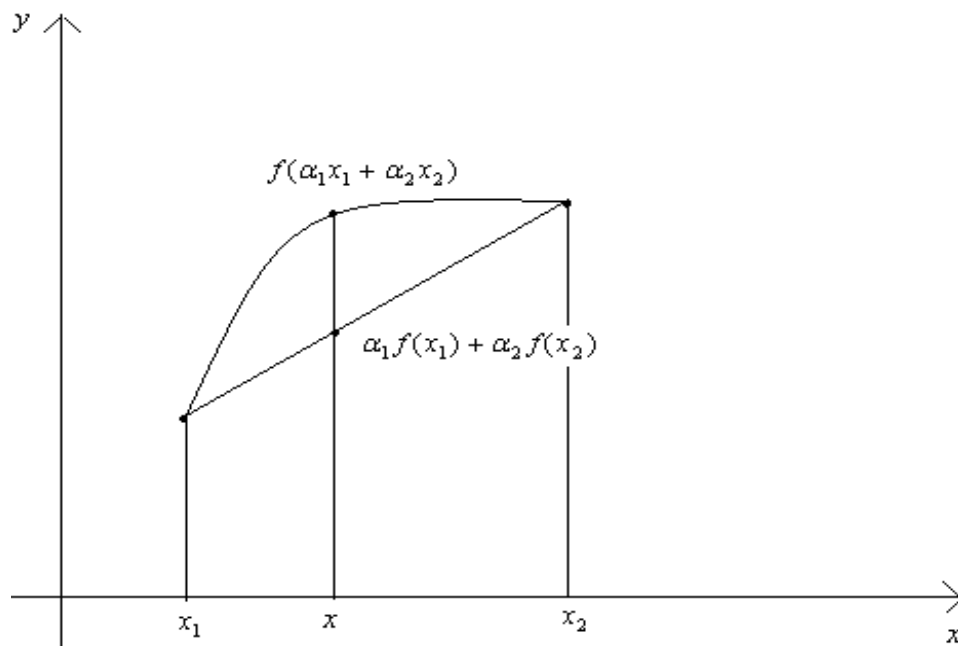
Геометричний зміст – хорда лежить над графіком функції.

Якщо виконується строга нерівність для усіх внутрішніх точок, то функція називається **строга опуклої**.



Функція $f(x)$ називається **опуклої нагору (увігнутої)** на $(a; b)$, якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) \quad \forall \alpha_1; \alpha_2 \geq 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$



Функція називається **увігнутої**, якщо *подграфік*, тобто множина відповідає умові:

$$\{(x, y) : x \in (a; b); y < f(x)\} - \text{опукла множина, тобто } \forall M_1; M_2 \subset E.$$

$$(\alpha M_1 + (1 - \alpha) M_2) \in E \quad \alpha \in [0; 1].$$

Аналогічно, функція називається **опуклої**, якщо *надграфік* – **опукла множина**.

Приклади:

$y = x^2$ - опукла функція; $|x|$ - теж опукла.

$y = \sqrt{x}$ - увігнута функція.

$$\text{Якщо позначити } \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x \in (x_1; x_2) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \wedge \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

і перша нерівність можна переписати у виді $f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$,

то одержимо нерівність (1') (довести самостійно): $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, тобто

кутовий коефіцієнт лівої хорди $\leq$ кутовому коефіцієнту правої хорди і кутовий коефіцієнт хорди зростає зі збільшенням аргументу.

Теорема (без доказу)

Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a; b)$.

Тоді для того, щоб $f(x)$ була **опуклої вниз** ($\cup$) на $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \nearrow$ на $(a; b)$.

(Для **строгої опуклості** необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \uparrow$).

Def II

Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a; b)$.

Тоді $f(x)$ називається **опуклої вниз**, якщо $\forall x_0 \in (a; b)$ графік функції лежить **не нижче** дотичної.

Теорема (без доказу)

Для диференційованої функції $f(x)$ справедливо: **Def I** $\Leftrightarrow$ **Def II**.

Теорема (достатня умова опуклості)

Якщо $\exists f''(x) \quad \forall x \in (a; b)$ і $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ - опукла вниз.

Якщо $\exists f''(x) \quad \forall x \in (a; b)$ і $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ - опукла нагору.

Доказ

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \nearrow \Leftrightarrow f(x)$ - опукла вниз.

Зауваження.

Якщо $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ - строго опукла вниз, тому що $f'(x) \uparrow$.

Приклади

1° $a^x \quad (a^x)'' = a^x (\ln a)^2 > 0 \Rightarrow a^x$ - строго опукла **вниз** на множині $\mathbb{R}$.

2° $\ln x \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \ln x$ - строго опукла **нагору** на множині $\mathbb{R}$.

3° $x^\alpha \quad (x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0$ при $\alpha > 1$ или $\alpha < 0$, тобто опукла вниз,
а при $0 < \alpha < 1$ функція опукла нагору.

Точки перегину функції

Def

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі $U_\delta(x_0)$, опукла нагору (униз) на інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ й $f(x)$ опукла униз (нагору) на інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$.

Така точка x_0 називається **точкою перегину**.

Приклад: $f(x) = x^3$ або $f(x) = \sin x$.

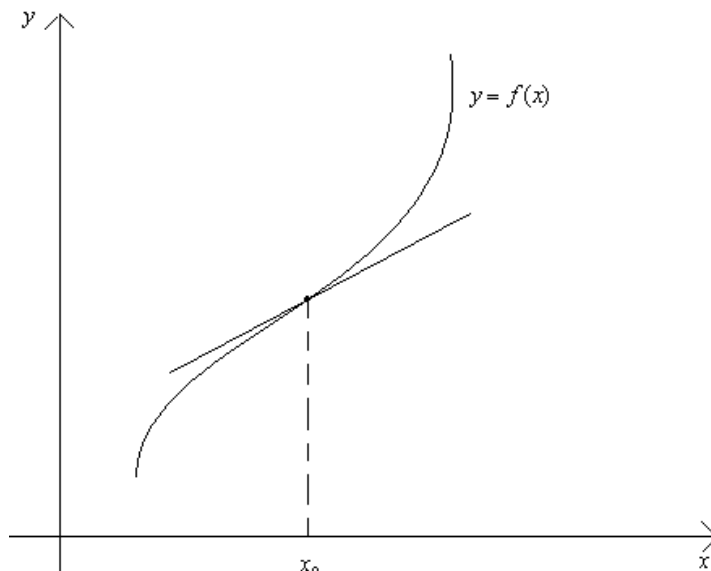
Зауваження.

Визначення переноситься на випадок $f'(x_0) = \infty$.

Наприклад, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. У точці перегину – екстремум похідної (якщо $\exists f'(x_0)$).

Лема

Якщо $f'(x)$ неперервна в точці перегину x_0 , то графік функції $f(x)$ лежить по різні боки від дотичної.

Доказ

Якщо $f(x) \cap$ на $(x_0 - \delta; x_0)$, то $f(x) \leq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

і $x_1 \rightarrow x_0 - 0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, тобто ліворуч – графік не вище дотичної.

Тому що $f(x) \cup$ на $(x_0; x_0 + \delta)$, то $f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$

і $x_2 \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Тобто графік функції лежить по різні боки від дотичної.

Теорема (необхідна умова перегину)

Якщо x_0 - точка перегину і $\exists f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Доказ

У точці перегину у похідної – екстремум. Отже, по теоремі Ферма: $f''(x_0) = 0$.

Теорема (перша достатня умова перегину)

Якщо $\exists f''(x)$ в околиці $U(x_0)$ і $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0 , тобто $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$, то в точці x_0 - перегин.

Доказ випливає з визначення точки перегину і достатньої умови опуклості.

Теорема (друга достатня умова перегину)

Якщо $f''(x_0) = 0, \dots, f^{(2k)}(x_0) = 0, f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, то в точці x_0 - перегин.

Доказ

По формулі Тейлора $f(x) - y_{кас.}(x) = \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!} \cdot \Delta x^{2k+1}$ змінює знак, тобто графік лежить по різні боки від дотичної.

Дослідження функції і побудова графіка

Схема дослідження функції:

1. Знайти область визначення функції.
2. Досліджувати на парність або непарність.
3. Досліджувати на періодичність.
4. Досліджувати на неперервність і поведінку в околах точок розриву.
5. Знайти вертикальні і похилі асимптоти.
6. Знайти точки перетинання графика з осями координат і інтервали знакопостоянства.
7. Досліджувати на монотонність і екстремуми (по $f'(x)$)
8. Досліджувати на опуклість і знайти точки перегину (по $f''(x)$)
9. Інші особливості функції (кути, асимптотическое поведінку на ∞ й ін.)

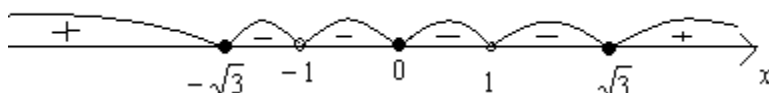
Приклад 1: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}$.
2. Функція непарна $\Rightarrow$ симетричність относительно 0.
3. Функція неперіодична.
4. Функція неперервна на області визначення, як елементарна функція.
У точках розриву $f(x) \rightarrow \infty$, тобто функція має розриви 2-го роду.
5. $x = \pm 1$ - вертикальні асимптоти.

Тому що вихідне рівняння можна представити у виді $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$, де другий доданок є нескінченно малої при $x \rightarrow \infty$, то $y = x$ - похила асимптот.

6. $f(0) = 0$. Інших нулів у функції немає.

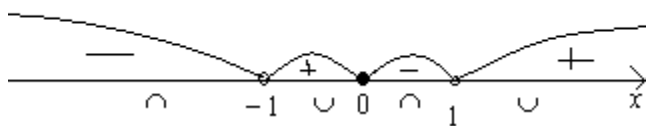
7. $y' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$



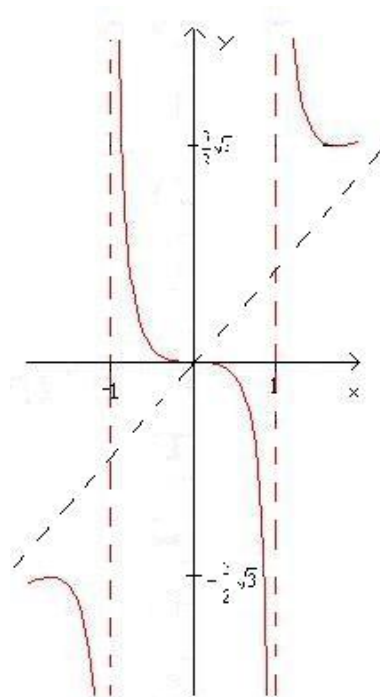
$$\text{loc max } f(x) = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3};$$

$$\text{loc min } f(x) = f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

8. $y'' = \frac{4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^2} - \frac{4x(x^4 - 3x^3)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$



0 – точка перегину



Приклад 2: $y = \frac{\cos 2x}{\cos x}$ - тригонометрична функція.

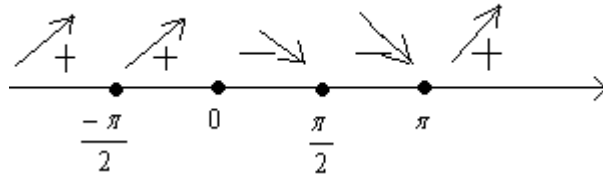
1. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

2. Функція парна.

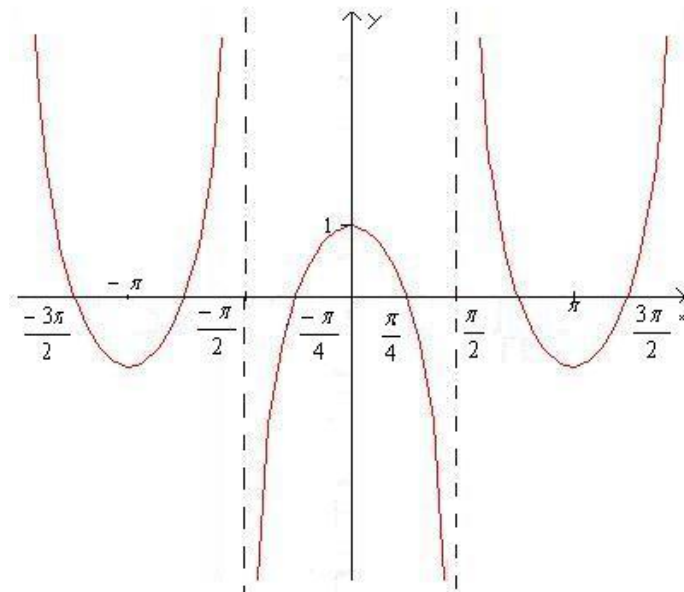
3. Періодичність - $2\pi \Rightarrow$ будуємо графік на $[0; \pi]$.

5. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ - вертикальні асимптоти.

7. $y' = \frac{-2 \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x (\cos 2x - 4 \cos^2 x)}{\cos^2 x} = -\frac{\sin x (2 \cos^2 x + 1)}{\cos^2 x} = 0$.



8. Перевірити самостійно, що $y'' \neq 0$.



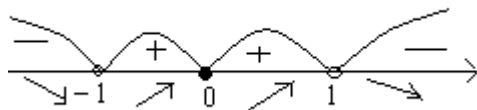
Приклад 3: $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

1. $D_f: \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

2. Функція непарна.

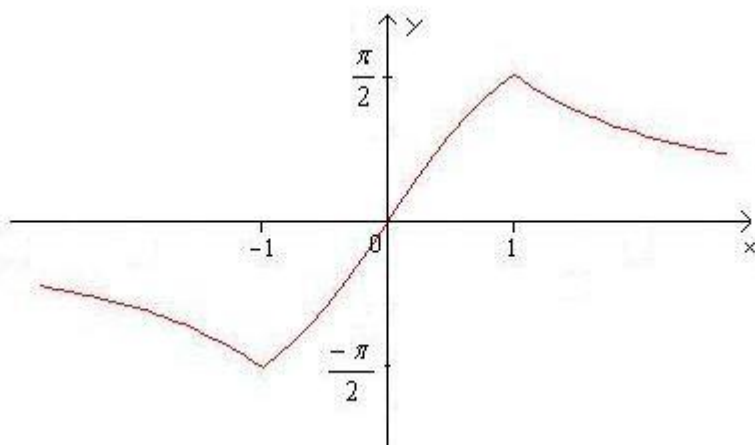
5. $y \rightarrow 0$, тобто $y = 0$ - горизонтальна асимптота.

7. $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sign}(1-x^2)$



$$y'_+(1) = -1; \quad y'_-(1) = 1 \quad - \text{ кут.}$$

$$8. \quad y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \operatorname{sign}(1-x^2), \quad \text{тобто перегин у точці } 0.$$



Побудова кривої, заданої параметрически

Особливість кривої $K : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, заданої параметрически, полягає в тому, що координати x і y рівноправні, і тому приходить досліджувати обох функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$.

Схема дослідження та ж, що і для явно заданої функції, але є ряд особливостей, про які зараз і поговоримо:

1. Область визначення параметра t - це $D_\varphi \cap D_\psi$.

Желательно також знайти E_φ - область значень x , і E_ψ - область значень y .

2. Якщо $\varphi(t)$ - парна, а $\psi(t)$ - непарна, то крива симетрична щодо осі OX , тому що $(\varphi(-t); \psi(-t)) = (\varphi(t); -\psi(t))$.

Якщо $\varphi(t)$ - непарна, а $\psi(t)$ - парна, то крива симетрична щодо осі OY .

Якщо обидві функції - непарні, то графік симетричний відносно O .

Якщо обидві функції - парні, то маємо випадок накладення кривої на себе.

3. Якщо функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ мають загальний період і безупинні, то крива - замкнута (або накладення кривої на себе).

Наприклад

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad T = 2\pi \quad - \text{окружність.}$$

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases} \quad T = \pi \quad - \text{відрізок } x + y = 1; \quad x, y \geq 0.$$

4.– 5. Перебування асимптот (уже обговорювалося докладно раніше).

6. Точки перетинання з осями координат знаходимо з рівнянь $\varphi(t) = 0 \vee \psi(t) = 0$.

7. Монотонність і екстремуми знаходимо для кожної з функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$.

Цікавий випадок виникає, коли в точці t_0 $\varphi'(t_0) = 0 \wedge \psi'(t_0) = 0$.

Якщо $\varphi''(t_0) \neq 0 \wedge \psi''(t_0) \neq 0$, то це - точка повернення.

8. На опуклість і точки перегину досліджуємо по $y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y'_t - x'_t \cdot y''_t}{(x'_t)^3}$.

9. Крім уже вивчених інших особливостей кривої варто додати точку самоперетинання, що визначається із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi(t_2) \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) \end{cases}, \text{ де } t_1 \neq t_2.$$

Приклад 1 **Астроїда:** $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

1. $D_\varphi \cap D_\psi = \mathbb{R}$; $E_\varphi = [-a; a] = E_\psi$, тобто крива лежить у квадраті $[-a; a] \times [-a; a]$.

2. Функції $\varphi(t)$ - парна, а $\psi(t)$ - непарна $\Rightarrow$ крива симетрична щодо осі OX , але тому що $(x(\pi - t); y(\pi - t)) = (-x(t); y(t))$, то крива симетрична і щодо осі OY .

3. Загальний період $T = 2\pi$, значить крива - замкнута. Тому нам досить побудувати графік при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. – 5. Функції неперервні й обмежені, тому асимптот немає.

6. $x = a \cos^3 t = 0$ при $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, тобто крива перетинає вісь OY у точках $(0; \pm a)$;
 $y = a \sin^3 t = 0$ при $t = k\pi$, тобто крива перетинає вісь OX у точках $(\pm a; 0)$.

7. На інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ маємо: $\varphi(t) \downarrow$, а $\psi(t) \uparrow$.

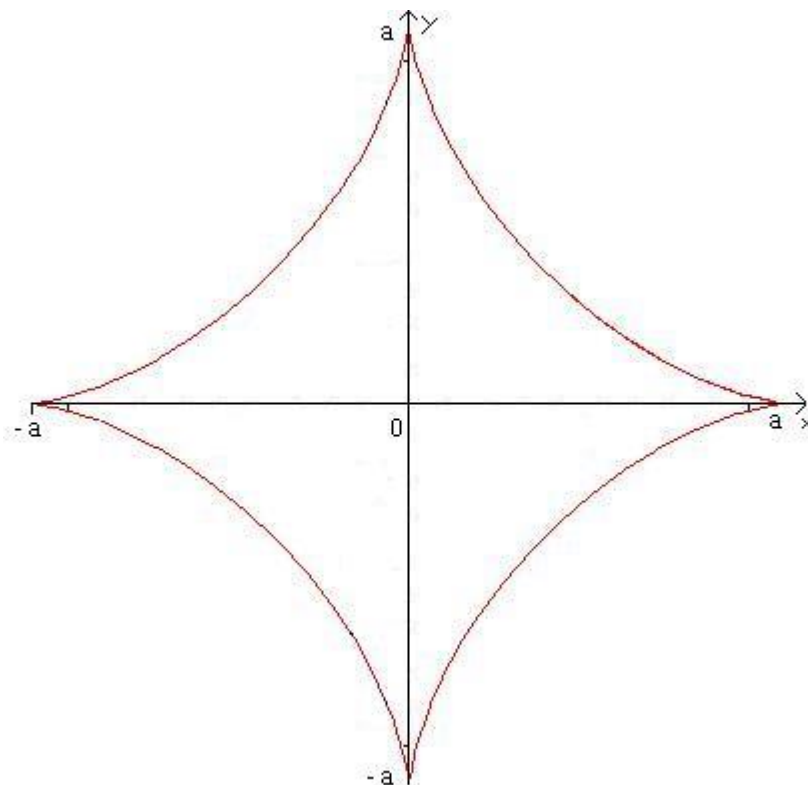
$$\begin{aligned} x_{\max} &= a & x_{\min} &= -a \\ y_{\max} &= a & y_{\min} &= -a \end{aligned}$$

8. $y''_{xx} = \frac{(-tg t)'_t}{-3a \cos^2 t \cdot \sin t} = \frac{1}{3a \cos^4 t \cdot \sin t} > 0$ на інтервалі $(0; \pi)$, тобто крива опукла униз.

9. Точки $(\pm a; 0)$ і $(0; \pm a)$ є точками повернення.

Крім цього, крива симетрична прямої $y = x$.

Малюємо досліджену криву:



2) **циклоїда:**

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) & - \text{нечетная} \\ y = a(1 - \cos t) & - \text{четная} \end{cases} \Rightarrow \text{графік функції симетричний відносно } OY.$$

$$x' = a(1 - \cos t) = 0 \quad 2k\pi;$$

$$y' = a \sin t \quad k\pi.$$

Трасекторія точки на ободу колеса радіусом $= 2R$.

